Mathematik Leistungskurs

K12

Kursleiter: *Peter Klüpfel*
Autor dieses Skripts: *Benedikt Kämpgen*

Grün = Analysis; Rot = Stochastik; Blau = Geometrie

Inhaltsverzeichnis

Thema	Seite
WH: Ableitungen	1
Die Umkehrung der Differentiation	2
Das bestimmte Integral	4
Zusammenfassung und Definition	7
Eigenschaften des Summenzeichens	8
Zusammenstellung der bisherigen Ergebnisse	11
Verallgemeinerung des Integralbegriffs	13
Eigenschaften des bestimmten Integrals	18
WH: Kurvendiskussion	23
Das Differenzintegral	27
Integralfunktion und Stammfunktion	29
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)	32
Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe des HDI's	34
Das unbestimmte Integral (Integrationsregeln)	35
Das Zufallsexperiment und sein Ergebnisraum	58
Das Baumdiagramm	60
Der Ergebnisraum zusammengesetzter Zufallsexperimente	61
Der Ereignisraum	62
Relationen zwischen Ereignissen – Operationen im Ereignisraum	66
Übersetzungstabelle	68
Ereignisalgebra	73
Die relative Häufigkeit	78
Das empirische Gesetz der großen Zahlen	80
Die drei Axiome von Kolmogorow	80
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung – die Unvollständigkeit des Axiomensystems	81
Der klassische Wahrscheinlichkeitsraum	84
Kombinatorik	89
1. Die Anzahl der k-Tupel aus einer n-Menge	89
2. Anzahl der Permutationen aus einer n-Menge A	89
3. Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge A	90
4. k-Teilmenge aus einer n-Menge A	90
Eigenschaften der Binomialkoeffizienten	92
Die so genannte „Mississippi"-Formel	96
Die Umkehrfunktion	105
Eigenschaften und Ableitung der Umkehrfunktion	106
Die Logarithmusfunktion	109
Eigenschaften von L	132
Bedingte Wahrscheinlichkeiten	139
Bedingte Wahrscheinlichkeiten bei zusammengesetzten Experimenten	139
Das Baumdiagramm	139
Eine neue Integrationsformel	144

Grenzwertbetrachtungen mit Hilfe der Regel von l'Hôpital	144
Die allgemeine Logarithmusfunktion	145
Bayes	146
Unabhängigkeit von Ereignissen	146
Unabhängigkeit von drei und mehr Ereignissen	151
e-Funktion	149
Ableitung und Stammfunktion der Exponential-Funktion	153
Die allgemeine Exponentialfunktion – Integrationsformeln	153
Anwendungen in der Wissenschaft	165
Die Bernoulli-Kette	166
Die Bernoullische Formel	169
Summenwahrscheinlichkeit und Binomialverteilung	171
Elementare Vektor-Algebra	181
Der Begriff des Vektors	181
Die Hintereinanderausführung zweier Vektoren und ihre Bedeutung	181
Die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl	184
Der Betrag eines Vektors / Einheitsvektors	184
Der lineare Vektorraum	185
Die Ungleichung von Tschebyschew	188
Determinanten	189
Lineare Abhängigkeit – Untervektorräume	194
Anwendungen: Teilverhältnisse in ebenen und räumlichen Figuren	199
Affine Koordinatensysteme	200
Das Rechnen mit Vektoren im Koordinatensystem	201
Determinanten und lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit	203
Das Teilverhältnis τ	204
Das bernoullische Gesetz der großen Zahlen	206
Parameterform der Geradengleichung im R^3 (bzw. im R^2)	208
Projektion von Geraden auf die Koordinatenachsen	211
Spurpunkte von Geraden	213
Sich schneidende und windschiefe Geraden	215
Ebenen – Parameter-Formeln der Ebenengleichung	216
Schnitt von Ebene und Gerade	222
Die Schnittgerade zweier nicht paralleler Ebenen	236
Zufallsgrößen	237
Unabhängige Zufallsgrößen	241
Die Verteilungsfunktion	244
Maßzahlen von Zufallsgrößen	246
Eigenschaften des Erwartungswertes	247
Die Varianz und die Streuung	248

12/1

Mathematik Leistungskurs

Vorbereitung auf die 1.Klausur

<u>WH: Ableitungen</u> S.1

Gängige Schreibweisen für Ableitungen:

$$y = f(x) \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \cdot f(x)$$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

<u>Wichtige Ableitungen:</u>

$f(x) = const \Rightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = u(x) + const \Rightarrow f'(x) = u'(x)$

$f(x) = const \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = const \cdot u'(x)$

$f(x) = u(x) \pm v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

<u>Produktregel:</u>

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

<u>Quotientenregel:</u>

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

<u>Kettenregel:</u>

$h(x) = g[f(x)]$

$h'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$

erst äußere Funktion ableiten, dann mit Ableitung der inneren Funktion nachmultiplizieren = nachdifferenzieren

<u>Die Umkehrung der Differentiation</u> S.2

Aufsuchen von Stammfunktionen:

Definition: Eine Funktion F heißt Stammfunktion von f, wenn gilt:

$F'(x) = f(x)$

Funktion f	**Stammfunktion F**
$f(x) = 1$	$F(x) = x + C$ $F'(x) = 1 = f(x)$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2} x^2 + C$
<u>Schreibweise</u>: $f(x) = x$	<u>Schreibweise</u>: $F(x) = \int x\,dx$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \; ; \; n \neq -1$ $n \neq -1$

<u>Merke:</u>

Eine Potenz wird integriert, indem man den Exponenten um eins erhöht und den neuen Exponenten in den Nenner schreibt

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = a^{m\cdot\frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m}$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C$$

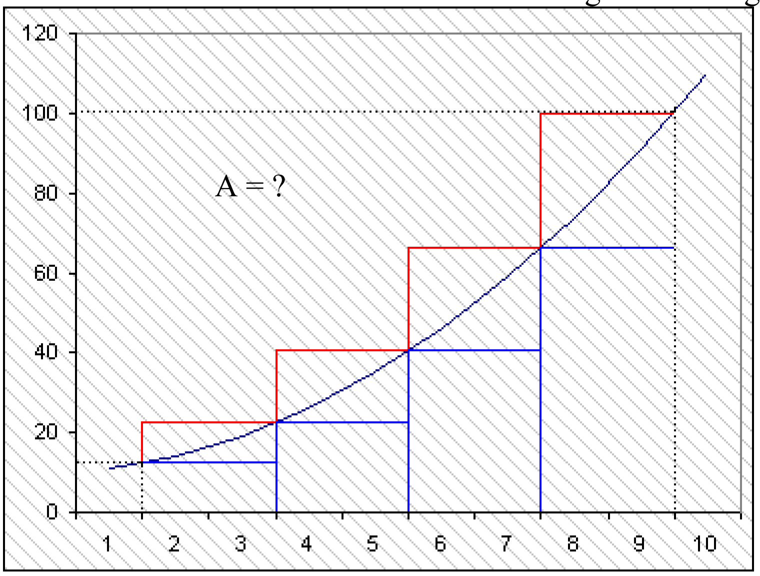
$$f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \int \cos x dx = \sin x + C$$

Eine stetige Funktion f hat unendlich viele Stammfunktionen, die sich aber alle um einen additiven, konstanten Summanden unterscheiden.

Das bestimmte Integral S.4

Elementare Vorbetrachtungen zur Integralrechnung

1. Problem der Flächeninhaltsberechnung krummlinig begrenzter Flächen



Randkurve G_f mit $f(x) = x^2 + 10$

- Breite: $\Delta x = \frac{(b-a)}{n} = \frac{10-2}{4}$
- Höhe: $\Delta y = 14$
- Untersumme: $\underline{S} = f(2)\cdot 2 + f(4)\cdot 2 + f(6)\cdot 2 + f(8)\cdot 2 = (14+26+46+74)\cdot 2$
  $\underline{S} = 320 F.E.$
- Obersumme: $\overline{S} = f(4)\cdot 2 + f(6)\cdot 2 + f(8)\cdot 2 + f(10)\cdot 2 = (26+46+74+110)\cdot 2$
  $\overline{S} = 512 F.E.$
- Abschätzung: 320 F.E. < A < 512 F.E.

2. Verbesserung der Abschätzung durch Halbieren der Rechtecksbreiten

- Abschätzung: 364 F.E. < A < 460 F.E.

3. Spezialfall: stetige, streng monoton zunehmende Funktion: $f : \mapsto y' = f(x)$ mit $D_f = [a,b]$ und f(x) < 0 (!) in D_f

Flächeninhalt A des Flächenstückes, das vom Graphen G_f, den Geraden x = a und x = b, sowie den x-Achsen eingeschlossen wird

Lösung: [a , b] $n \in N$ in gleichlange Intervalle der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ teilen

- Untersumme: $\underline{S}_n = \sum_{\upsilon=1}^{n} [f(a+(\upsilon-1)\cdot\frac{b-a}{n})\cdot\frac{b-a}{n}]$
- Obersumme: $\overline{S}_n = \sum_{\upsilon=1}^{n} [f(a+\upsilon\cdot\frac{b-a}{n})\cdot\frac{b-a}{n}]$

Höhe Breite

Es scheint von der Anschauung her klar, dass in unserem obigen Spezialfall durch Vergrößerung von n (also Verkleinerungen den Breiten $\Delta x = \frac{b-a}{n}$) der gesuchte Flächeninhalt A sowohl von der Untersumme als auch der Obersumme immer besser approximiert wird.

Differenzbildung: $\overline{S}_n - \underline{S}_n = f(x_n)\cdot\Delta x - f(x_0)\cdot\Delta x = [f(b)-f(a)]\cdot\Delta x = [f(b)-f(a)]\cdot\frac{b-a}{n}$

Für n $\rightarrow \infty$ geht $\overline{S}_n - \underline{S}_n$ $\rightarrow$0, das heißt sowohl $\overline{S}_n$ als auch $\underline{S}_n$ mit $n \rightarrow \infty$, = Grenzwert der im obigen Spezialfall den gesuchten Flächeninhalt A angibt;

Zusammenfassung und Definition: S.7

f sei eine, im Intervall [a ; b] stetige und streng monoton zunehmende Funktion f(x) > 0

Dann besitzen die folgenden Untersummen $\underline{S}_n$ und $\overline{S}_n$ den gleichen Grenzwert.

Dieser Grenzwert bezeichnet man als das bestimmte Integral von f über [a; b]

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n}$$

Falls das bestimmte Integral existiert, dann heißt die Funktion f über dem Intervall [a ; b] integrierbar

Berechnungsformel für das bestimmte Integral integrierbarer Funktionen:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{\upsilon=1}^{n} [f(a+\upsilon\cdot\frac{b-a}{n})\cdot\frac{b-a}{n}]}$$

<= Erst Summe bilden, dann Grenzwert!

Eigenschaften des Summenzeichens:

$$\sum_{\upsilon}^{n}(a_\upsilon + b_\upsilon) = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)...(a_n+b_n) = (a_1+a_2+a_3+...+a_n)+(b_1+b_2+b_3+...+b_n)$$

$$= \sum_{\upsilon}^{n} a_\upsilon + \sum_{\upsilon}^{n} b_\upsilon$$

$$\sum_{\upsilon}^{n} k \cdot a_\upsilon = k \cdot \sum_{\upsilon}^{n} a_\upsilon$$

Elementar geometrische Beziehungen:

$$\int_a^b x^0 dx = \int_a^b 1 dx = b - a$$

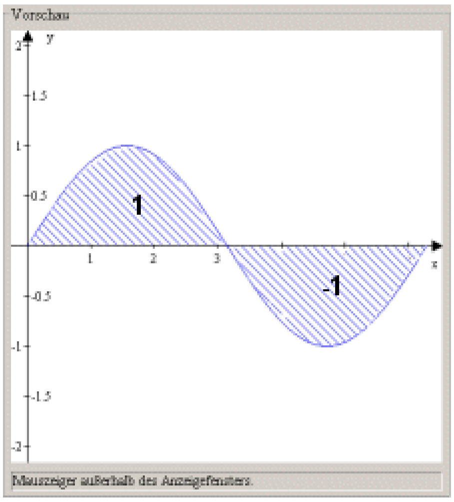
Zusammenstellung der bisherigen Ergebnisse: S.11

$$\int_a^b x^0 dx = b - a$$

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3 \Rightarrow \int_b^a x^n dx = \frac{1}{n+1}b^{n+1} - \frac{1}{n+1}a^{n+1} \quad ; (n \neq -1)$$

Bei der Integration von Polynomfunktionen „taucht“ im Ergebnis eine Stammfunktion auf
Diese überraschende Gesetzmäßigkeit gilt nicht nur bei Polynomfunktionen, sondern auch bei stetigen Funktionen! => Muss später bewiesen werden!



$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ <= Stammfunktion an der oberen minus Stammfunktion an der unteren Grenze

$\Leftrightarrow [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Das bestimmte Integral gibt im Allgemeinen nicht den Flächeninhalt, sondern eine Flächenbilanz an!

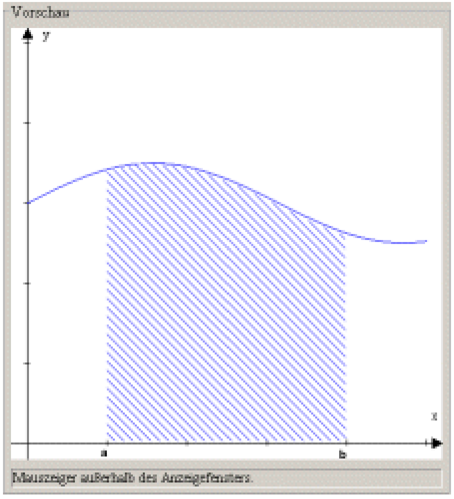
Verallgemeinerung des Integralbegriffs

Das vorher festgestellte Verfahren (US ; OS) führt auch bei Funktionen zum Ziel, die nicht unseren eingangs vorausgesetzten Einschränkungen unterliegen;

Satz 1: Jede monotone Funktion f, ist in einem eingeschlossenem Intervall [a ; b] integrierbar
Satz 2: Jede stetige Funktion f ist in einem abgeschlossenen Intervall [a ; b] integrierbar

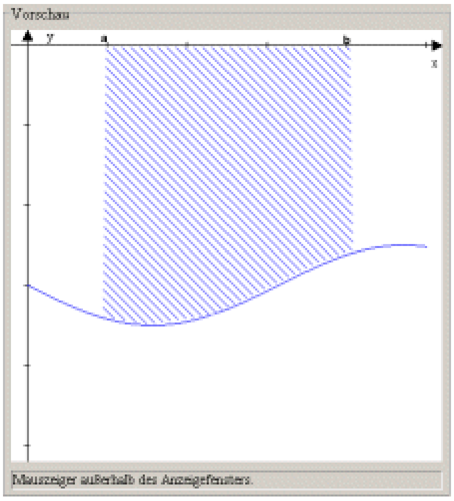
Allerdings gibt das bestimmte Integral bei dieser erweiterten Klasse von Funktionen im Allgemeinen nicht mehr den Flächeninhalt an.

1. $f(x) \geq 0$ in [a ; b]



In diesem Fall gibt das bestimmte Integral den Flächeninhalt der Fläche, die von G_f, den Geraden x = a, x = b und der x-Achse eingeschlossen wird.

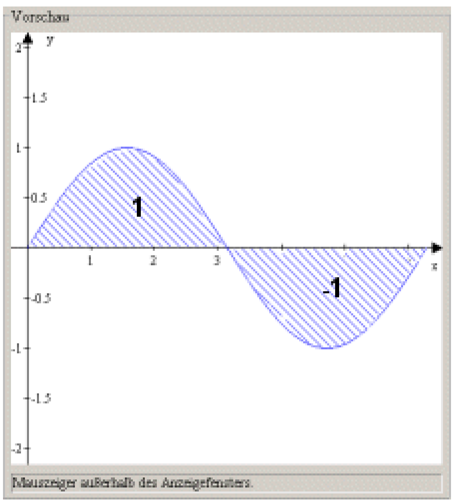
2. $f(x) \leq 0$ in [a ; b]



Das bestimmte Integral gibt die negative Maßzahl des Flächeninhalts an.

Flächeninhalt: A = $|\int_b^a f(x)dx|$

3. $f(x)$ hat Nullstellen $c \in [a;b]$ und wechselt das Vorzeichen... (allgemeiner Fall)



Das bestimmte Integral gibt den Flächeninhalt „oberhalb der x-Achse“ minus den Flächeninhalt „unterhalb der x-Achse“ an (Flächendifferenz/ -bilanz)

Merke: Sollte der Flächeninhalt verlangt sein, dann darf man über Nullstellen nicht hinwegintegrieren, sondern muss abschnittsweise integrieren.

Eigenschaften des bestimmten Integrals:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ <= Vertauscht man bei einem bestimmten Integral die Grenzen, so ändert das Integral sein Vorzeichen

Lehrsatz (die so genannte Linearitätseigenschaften des Integrals):

$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$ <= einen konstanten Faktor kann man vor das Integral ziehen

$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ <= Summen und Differenzen kann man gliedweise integrieren

Lehrsatz (Monotonieeigenschaft)

$f(x) < g(x)$ in [a ; b]

$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$

Lehrsatz (abschnittsweise Integration)

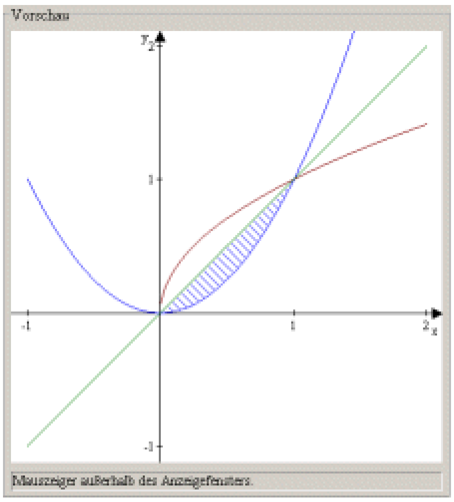
Ist f(x) in [a ; b] integrierbar und ist c ein Element aus diesem Intervall, dann gilt Folgendes:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Zusatz:

$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$ <= bei Punktsymmetrie ; f(-x) = -f(x)

Funktion und Umkehrfunktion schneiden sich auf der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten:



WH: Kurvendiskussion S.23

Nullstellen:

$f(0)$ <= Schnitt mit der y-Achse; $f(x) = 0$ <=Schnitt mit der x-Achse

Extremstellen:
1. $f'(x)=0 \wedge f''(x)<0$ <= lokaler Hochpunkt (x/f(x))
2. $f'(x)=0 \wedge f''(x)>0$ <= lokaler Tiefpunkt (x/f(x))

Wendestellen:
$f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$ <= Wendepunkt (x/f(x))

Symmetrie:
$f(-x)=-f(x)$ <= Punktsymmetrie
$f(-x)=f(x)$ <= Achsensymmetrie

Krümmungsverhalten:
$f''(x)<0$ für alle $x \in I$ <= **G_f ist in I** rechtsgekrümmt (konvex)
$f''(x)>0$ für alle $x \in I$ <= **G_f ist in I** linksgekrümmt (konkav)

Das Differenzintegral S.27

Flächeninhalt zweier Graphen im Intervall [a ; b]

$$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

- insbesondere können a und b die Schnittstellen sein
- dabei dürfen sich G_f und G_g in]a ; b[nicht schneiden

Anmerkung:
f(x) und g(x) könnten einen Additiven, nicht elementar integrierbaren Term gemeinsam haben!

Integralfunktion und Stammfunktion S.29

Gegeben sei eine stetige Integrandenfunktion f. Dann heißt folgende Funktion F eine Integralfunktion von f:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$ <=Integralfunktion der Integrandenfunktion

Eine Integralfunktion hat mindestens immer 1 Nullstelle:

$$F(x)=\int_a^a f(t)dt=0$$ <= Die untere Grenze a ist immer eine Nullstelle

Zum ausrechnen erstmal Integralfrei Darstellung bilden!

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung S.32

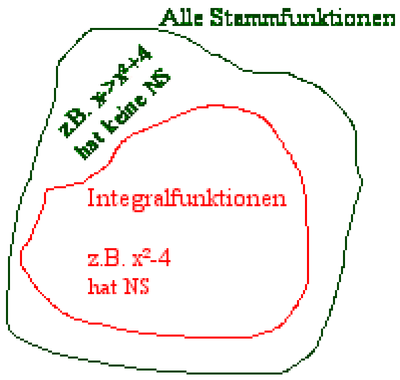
Wenn wir in einfachen Fällen die Integralfunktion ableiten, erhalten wir die Integrandenfunktion zurück. In diesen einfachen Fällen, ist die Integralfunktion eine Stammfunktion der Integrandenfunktion

Wir fassen den Hauptsatz der Differential und Integralrechnung zusammen:
Jede Integralfunktion F einer stetigen Integrandenfunktion f ist differenzierbar und ihre Ableitung ist die Integrandenfunktion:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x)=f(x)$$

<u>Andere Lesart:</u> Die Integralfunktion F einer stetigen Integrandenfunktion f ist eine Stammfunktion zu f

Nach dem HDI ist jede Integralfunktion eine Stammfunktion, aber nicht jede Stammfunktion ist eine Integralfunktion (z.B. wenn F(x) keine Nullstelle hat):



<u>Berechnungen bestimmter Integrale mit Hilfe des HDI's</u> S.34

Ergebnis:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

zurück zum bestimmten Integral:

$$\int_a^b f(x)dt = F(b) - F(a)$$ <= mit stetiger Integrandenfunktion

Das bestimmte Integral einer stetigen Integrandenfunktion f zwischen der unteren Grenze a und der oberen Grenze b ist gleich der Differenz $F(b) - F(a)$ einer beliebigen Stammfunktion F zur Integrandenfunktion f:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

<u>Hinweis:</u> S.34

Um von einer Funktion die Konstante C zu erhalten, Integralfuntion integralfrei schreiben +C. und dann nach C auflösen.

<u>Das unbestimmte Integral (Integrationsregeln)</u> S.35

Da Integralfunktionen Stammfunktionen sind, schreiben wir künftig auch Stammfunktionen mit dem Integralzeichen

$\int f(x)dx$ <= Menge aller Stammfunktionen = unbestimmtes Integral von f(x)

<u>Sprechweise</u>: Integration und Differentiation sind „zueinander inverse" Operationen

<u>Zwei wichtige Rechenregeln:</u>

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

<u>Merke:</u>

Aus jeder Differentiationsregel, kann man eine Integrationsregel gewinnen!

Hinweise:
Einfache Nullstelle (ungerade Ordnung): Schnitt mit der x-Achse
Doppelte Nullstelle (gerade Ordnung): Berührung mit der x-Achse

12/1
Vorbereitung auf die 2.Klausur

Das Zufallsexperiment und sein Ergebnisraum S.58

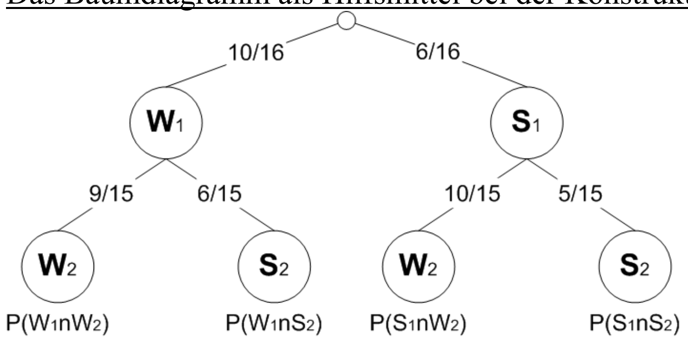
Wir fassen alle möglichen Versuchsergebnisse eines Experiments zu einer Menge zusammen und bezeichnen diese Menge als Ergebnisraum Ω des Zufallsexperiments:
$\Omega = \{w_{1,} w_{2,} w_{3,} w_{4,} ... w_{m,}\}$ mit $m \in N$

Mögliche uns zur Verfügung stehende mathematische Objekte:

- Mengen: Mengen, die die selben Elemente enthalten, sind gleich, weil es nicht auf die Reihenfolge ankommt
- Zahlenpaare: (1,2)
- Tripel: (1,2,3) ; (1,2,4)...
- n- Tupel:

Zwei n-Tupel sind nur dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten und dazu noch in der richtigen Reihenfolge; Es kommt also wesentlich auf die Anordnung an!

Das Baumdiagramm als Hilfsmittel bei der Konstruktion von Ergebnisräumen: S.60



Der Ergebnisraum zusammengesetzter Zufallsexperimente (hintereinander Ausführen von Experimenten; es kommt auf die Reihenfolge an) S.61

Exp_1: „Würfelwurf“
Exp_2:“Münzwurf“
Exp:= Exp_1+ Exp_2 <=zusammengesetztes Experiment, erst Exp_1 dann Exp_2
$|\Omega_1|=6$; $|\Omega_2|=2$
$|\Omega| = |\Omega_1| \, |\Omega_2| = 6 \cdot 2 = 12$

Einschub aus der Mengenlehre:

$A_1, A_2, A_3, A_4 ..., A_n$ $(n \in N)$ seien Mengen;
Wir bilden eine neue Menge:
$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 ... \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, a_4 ..., a_n) / a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3 ... a_n \in A_n\}$ <= Diese konstante Menge heißt Kartesisches Produkt der n einzelnen Mengen.
Anzahl der Elemente:
$| A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 ... \times A_n | = | A_1 | \cdot | A_2 | \cdot | A_3 | \cdot | A_4 | ... \cdot | A_n |$

Der Ereignisraum S.62
Der Begriff des Ereignisses
Allgemeine Definition: jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt ein Ereignis A aus dem Ergebnisraum Ω

Die Menge aller Ereignisse aus Ω heißt Ereignisraum $P(\Omega)$

Besondere Teilmengen von $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, \ldots w_n\}$
- Ω ...sicheres Ereignis: tritt immer ein
- $\varnothing$ ...unmögliches Ereignis: tritt nie ein
- $\{w_1\}, \{w_2\}, \{w_3\}, \ldots \{w_n\}$ ...Elementarereignisse

Zusatz:

$\Omega = \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$ <=besser

$\Omega = \{1,2,3,4,5\}^2$ <= Abstrakt/Symbolisch

Lehrsatz:
Ist die Mächtigkeit eines Ergebnisraumes m so hat der zugehörige Ereignisraum die Mächtigkeit 2^m;

Man bezeichnet $P(\Omega)$ manchmal auch als die Potenzmenge von Ω;

Relationen zwischen Ereignissen – Operationen im Ereignisraum S.66

Wir betrachten zwei Ereignisse A und B aus dem Ergebnisraum Ω, d.h. A und B sind Teilmengen von Ω.

Mengensprache →	→ **Ereignissprache**
1)Gleichheitsrelation: $A = B \Leftrightarrow [w \in A \Leftrightarrow w \in B]$	A = B: Mit dem Ereignis A tritt auch das Ereignis B ein und umgekehrt
2)Teilmengenrelation: $A \subseteq B: \Leftrightarrow [w \in A \Rightarrow w \in B]$	$A \subseteq B$: Mit A tritt auch B ein („das Ereignis A zieht das Ereignis B nach sich“)
1)Komplement von A: $\overline{A} := \{w \in \Omega / w \notin A\}$	$\overline{A}$ („Gegenereignis zu A“; „Ereignis nicht-A“): tritt genau dann ein, wenn A nicht eintritt
2)Vereinigung: $A \cup B := \{w \in A \vee w \in B\}$ <= nicht ausschließendes „oder“	$A \cup B$ („Ereignis A oder B“) tritt genau dann ein, wenn A oder B oder beide Ereignisse eintreten
3)Durchschnitt: $A \cap B := \{w \in \Omega / w \in A \wedge w \in B\}$ <= „und zugleich“	$A \cap B$ („Ereignis A und B“): tritt genau dann ein, wenn A und zugleich B eintritt
4)Relatives Komplement von A bezüglich B: $B \setminus A := \{w \in \Omega / w \in B \wedge w \notin A\}$ <= Differenzmenge „B ohne A“	$B \setminus A = B \cap \overline{A}$ („Ereignis B und nicht-A“): tritt genau dann ein, wenn B und zugleich nicht-A eintritt

Übersetzungstabelle S.68

Mengensprache	**formale Sprache**	**Ereignissprache**
Element	ω	Ergebnis

Grundmenge	Ω	Ergebnisraum
Potenzmenge	$P(\Omega)$	Ereignisraum
A ist Teilmenge der Grundmenge Ω	$A \subseteq \Omega$	A ist ein *Ereignis* aus dem Ergebnisraum Ω
A ist die Leere Menge	$A = \varnothing$	A ist das unmögliche Ereignis
A ist die Grundmenge Ω	$A = \Omega$	A ist das sichere Ereignis
ω ist kein Element von A	$\omega \notin A$	Das Ereignis A tritt nicht ein
A ist Teilmenge von B	$A \subseteq B$	Das Ereignis A zieht das Ereignis B nach sich
Komplementärmenge von A	$\overline{A}$	Ereignis nicht-A
Vereinigung von A und B	$A \cup B$	Ereignis A oder B
Durchschnitt von A und B	$A \cap B$	Ereignis A und B
Relatives Komplement von A bezüglich B (Differenzmenge B ohne A)	$B \setminus A = B \cap \overline{A}$	Ereignis B und nicht-A
A und B sind elementefremd	$A \cap B = \varnothing$	Die Ereignisse A und B sind unvereinbar
A und B sind nicht elementefremd	$A \cap B \neq \varnothing$	Die Ereignisse A und B sind vereinbar

Rechengesetze

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
<= Kommutativgesetze

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
<= Assoziativgesetze

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
<= Distributivgesetz

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap \Omega = A$$
<= Gesetze für neutrale Elemente

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cup \Omega = \Omega$$
<= Gesetze für die dominanten Elemente

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$
<= Gesetze für das komplementäre Element

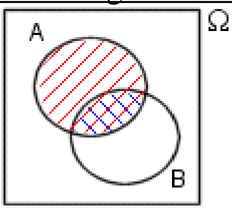
$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$
<= Idempotenzgesetze

$\overline{\overline{A}} = \left(\overline{\overline{A}}\right) = A$ <= Gesetze für das doppelte Komplement

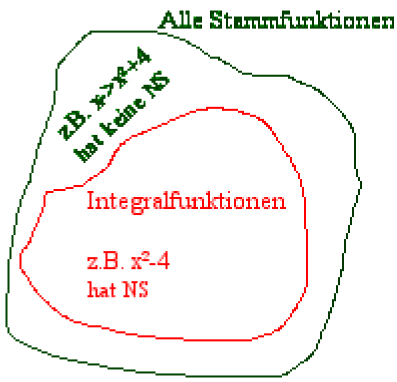
$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$
<= Absorptionsgesetze

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ <= Gesetze von de Morgan

Venndiagramm-Beispiel:



Hinweis:
Wenn gilt: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... A_n = \Omega$ und $A_i \cap A_k = \Omega$ $[k \neq i]$, dann heißt die Gesamtheit dieser Teilmengen $Z\{A_1, A_2, A_3, ... A_n,\}$ eine Zerlegung von Ω



Ereignisalgebra S.73

$A, B \subset \Omega => A, B \in P(\Omega)$ <= Ereignisraum, Er enthält alle Teilmengen, Ereignisse von Ω

Nebenbei: Die ganzen Zahlen Z sind bezüglich der Algebraischen Operationen +.- abgeschlossen

Häufig interessiert nur ein kleiner Teil S von $P(\Omega)$ aus praktischen Gründen

Definition:
Eine nicht leere Menge S von Ereignissen aus einem Ergebnisraum Ω heißt eine Ereignisalgebra S, wenn gilt:

1. Wenn mein Ereignis $A \in S => \overline{A} \in S$
2. Wenn mein Ereignis $A, B \in S => A \cup B \in S$
3. Wenn mein Ereignis $A, B \in S => A \cap B \in S$

Andere Formulierung:
Eine Ereignisalgebra S ist bezüglich der drei Mengentheoretischen Operationen $\overline{\ }, \cup, \cap$ abgeschlossen

das bedeutet, dass jede Ereignisalgebra das unmögliche und das sichere Ereignis enthalten muss

Spezielle Ereignisalgebra
$S = \{\emptyset, \Omega\}$ <= gröbste Ereignisalgebra
$S = P(\Omega)$ <= feinste Ereignisalgebra
$S = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ <= gängige Ereignisalgebra

Lehrsatz:
S ist bereits dann eine Ereignisalgebra, wenn gilt:
1. $A \in S \Rightarrow \overline{A} \in S$
2. $A, B \in S \Rightarrow A \cup B \in S$

Wenn die beiden ersten Forderungen erfüllt sind, ist die dritte Forderung automatisch auch erfüllt!

Beispiele für typische Aufgaben S.76

Die relative Häufigkeit S.78
Experiment: Wir führen ein Experiment n-mal durch. Unser betrachtetes Ereignis A tritt Z-mal ein.
Dann heißt Z die absolute Häufigkeit von A
$h_n(A)$:= (ist definiert als) $\frac{Z}{n}$ <= ist die relative Häufigkeit von A

1. $h_n(\emptyset) = 0$
2. $h_n(\Omega) = 1$;
3. $0 \leq h_n(A) \leq 1$
4. $h_n(A \cup B) = ?$

Wichtiges Ergebnis:
$h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)$

5. Spezialfall: unvereinbare Ereignisse
   $A \cap B = \emptyset \Rightarrow h_n(A \cap B) = h_n(\emptyset) = 0$
   ⇨ $h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$

6. $A \cup \overline{A} = \Omega$; $A \cap \overline{A} = \emptyset$
   $h_n(A \cup \overline{A}) = h_n(A) + h_n(\overline{A}) - h_n(A \cap \overline{A})$
   $h_n(\Omega) = 1 = h_n(A) + h_n(\overline{A})$
   ⇨ $h_n(\overline{A}) = 1 - h_n(A)$

Das empirische Gesetz der großen Zahlen S.80
Es gibt Ereignisse deren relative Häufigkeit sich bei einer hinreichend großen Anzahl von Versuchen um einen festen Zahlenwert stabilisiert

Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Diesen Zahlenwert bezeichnet man als die statistische Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

Die drei Axiome von Kolmogorow (orientiert an Eigenschaften der relativen Häufigkeit) S.80
Definition: Eine Funktion P, die jedem Ereignis aus S eine reelle Zahl zuordnet heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn sie folgende 3 Eigenschaften besitzt:

K1) $P(A) \geq 0$
K2) $P(\Omega) = 1$
K3) $A \cap B = \varnothing$ => $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ <= Additivität

Es ist ein minimales Axiomensystem mit dessen Hilfe man die von der relativen Häufigkeit bekannten Eigenschaftsmathematiken ableiten kann. Das Axiomensystem ist in dem Sinn unvollständig, dass es für ein bestimmtes Ereignis keinen konkreten Zahlenwert vorgibt;

Folgerung aus dem Axiomensystem
Wegen: $P(\Omega) = 1$ (Inhalt eines Einheitsquaders), kann man Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ deuten als geeignete Teilflächen des Einheitsquaders;

LS1) Lehrsatz von der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses und seines Gegenereignisses
$P(A) + P(\overline{A}) = 1$ => $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
LS2)
$P(\varnothing) = 0$
LS3)
$0 \leq P(A) \leq 1$
LS4)
$A \subset B$ => $P(A) \leq P(B)$
LS5) Folgerung aus Axiom 3
$A_1, A_2, ..., A_n$ sind paarweise unvereinbare Ereignisse =>
$P(A_1 \cup A_2, ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$
LS6) Summenregel
$P(A \cap B) \neq \varnothing$ <= A, B vereinbar =>
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ <= allgemeine Summenregel

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung – die Unvollständigkeit des Axiomensystems S.81
1. $0 \leq P(A_k) \leq 1$
2. $P(A_1 \cup A_2, ... \cup A_n) = P(\Omega) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$
Haben wir eine Zerlegung von Ω und gilt 1. und 2. so spricht man in dem Zusammenhang von P auch von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung
Man spricht in diesem Zusammenhang von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, weil die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 auf die einzelnen Ereignisse der Zerlegung verteilt ist;

Der klassische Wahrscheinlichkeitsraum (Laplace-Experimente/Laplace-W'keiten) S.84
„Laplace-Experiment"
$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, ... w_m\}$ => $|\Omega| = m$
Zerlegung von Ω
$P(\{w_1\} \cup \{w_2\} \cup \{w_3\} \cup ... \{w_m\}) = P(\Omega)$
$P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + P(\{w_3\}) + ... P(\{w_m\}) = 1$
$p + p + p + p ... + p = 1$ <= Laplace-Annahme
=> $p = \frac{1}{m}$ => $P(\{w_i\} = \frac{1}{|\Omega|}$ <= i=1,2,3,...m

$A \subset \Omega \Rightarrow A = \{w_1, w_2, w_3, ...w_k\} \Rightarrow |A| = k$ <= k≤m

$A = \{w_1\} \cup \{w_2\} \cup \{w_3\} \cup ... \{w_k\}$

$P(A) = P(\{w_1\} \cup \{w_2\} \cup \{w_3\} \cup ... \{w_k\})$

$P(A) = P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + P(\{w_3\}) ... P(\{w_k\})$

$$P(A) = \frac{1}{|\Omega|} + \frac{1}{|\Omega|} + \frac{1}{|\Omega|} + ... \frac{1}{|\Omega|}$$

$$\Rightarrow P(A) = k \cdot \frac{1}{|\Omega|} \Rightarrow P(A) = \frac{k}{|\Omega|}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Zusammenfassendes Ergebnis

$A \subset \Omega \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ <= Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses = Anzahl aller günstigen geteilt durch Anzahl aller möglichen Fälle

Kombinatorik S.89

Zählprinzip

$A_1, A_2, A_3, ...A_k$ seien Mengen

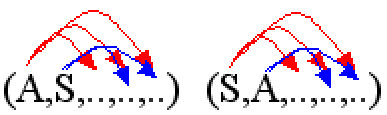
$m_1 = |A_1| \Rightarrow m_2 = |A_2| \Rightarrow m_3 = |A_3| \Rightarrow m_k = |A_k|$

(, , , , , ,)...k-Tupel

$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot ... \cdot m_k$ <= Auswahlmöglichkeiten

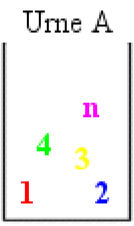
Es gibt insgesamt $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot ... \cdot m_k$ solcher Tupel

Die Auswahlmöglichkeiten multiplizieren sich aus!!!



1. Die Anzahl der k-Tupel aus einer n-Menge (Menge mit n Elementen) S.89

Wir stellen uns im weiteren Verlauf die Menge A vor, als eine Urne mit n verschiedenen Elementen



Musterexperiment:

Nacheinander Ziehen von **k Elementen mit Zurücklegen** und Bilden von **k-Tupeln**:

- Anordnung wichtig
- Elemente können sich wiederholen

1. 2. 3. 4. ... k. Stellen

(, , , , ,)

$n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot ... \ n$ Besetzungsmöglichkeiten

Die Anzahl der k-Tupel aus einer Menge A mit |A|= n beträgt n^k $(n, k \in N)$

2. Anzahl der Permutationen aus einer n-Menge A   S.89

Musterexperiment:

Nacheinander Ziehen aller **n-Elemente ohne Zurücklegen** und Bilden von **n-Tupeln**:

- Anordnung wichtig
- Elemente wiederholen sich nicht
- Alle n Elemente werden gezogen

1. 2. 3. 4. ...n. Stellen

(, , , , ,)

$n\cdot\ (n-1)\cdot(n-2)\cdot\ ....\ \cdot 1$ Besetzungsmöglichkeiten

Die Anzahl von Mutationen der Menge A mit n = |A| beträgt n! = $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot(n-1)\cdot n$
Sprich: *„n-Fakultät“* **<1! := 1 ; 0! :=1 ; n! = n x (n-1)!>**

3. Anzahl der k-Permutationen aus einer n-Menge A   S.90

Musterexperiment

Nacheinander Ziehen von **k-Elementen ohne Zurücklegen** aus einer Menge mit **n Elementen** und Bilden von **k-Tupeln:**

- k Stück (k≤n)
- Anordnung wichtig
- Elemente wiederholen sich nicht

1. 2. 3. ... (k-2) k. Stellen

(, , , , ,)

$n\cdot\ (n-1)\cdot(n-2)\cdot\ n-(k\text{-}2)\ \cdot n-(k\text{-}1)$ Besetzungsmöglichkeiten

Die Anzahl an k-Permutationen |A| = n beträgt:
$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot(n-k+2)\cdot(n-k+1)$ <= k-Faktoren
=> $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

4. k-Teilmenge aus einer n-Menge A   S.90

Musterexperiment

Gleichzeitiges Ziehen von **k-Elementen** und Bilden einer **k-Teilmenge**:

- Elemente wiederholen sich nicht
- Reihenfolge spielt keine Rolle

Die Anzahl der k-Teilmengen sei:

$$x\cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Auflösen nach x:

$$x = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Die Anzahl der k-Teilmengen einer n-Menge A beträgt:
$\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$ <= nur für ohne Reihenfolge

Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

S.92

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-n}$$

Beim Ausmultiplizieren von Binomen auch auftretend, bezeichnet man sie auch als **Binomialkoeffizienten:**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Die so genannte „Mississippi"-Formel

S.96

spezielle k-Tupel; auf wie viele Arten kann man die Buchstaben des Wortes Mississippi anordnen!

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. Stellen

(, , , , , , , , , ,)

$$\binom{11}{1} \cdot \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2}$$

M I S P

A sei eine Menge mit Mächtigkeit |A| = n ;
Die Anzahl der k-Tupel aus A mit $k_1, k_2, \ldots k_m$ gleichen Elementen beträgt:

$$\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots k_m!}$$

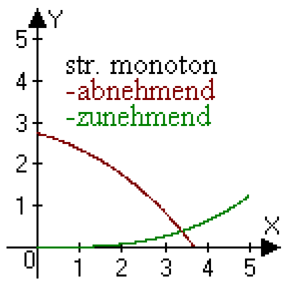
Wichtig bei Aufgaben:

- Gegenereignis beachten
- Auf das Wörtchen „mindestens" achten

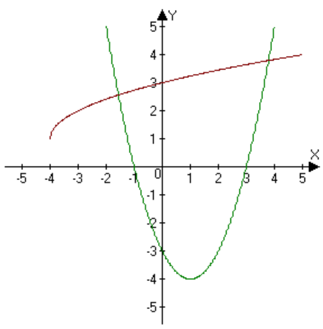
Die Umkehrfunktion

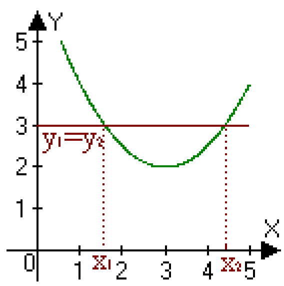
S.105

- Eine Funktion f ist genau dann umkehrbar, wenn für alle $x_1, x_2 \in D_f$ gilt: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- Lehrsatz: Streng monoton zunehmende bzw. streng monoton abnehmende Funktionen sind allgemein umkehrbar; sind Funktionen nicht streng monoton, so muss man sie auf ein Monotonieintervall einschränken



- Eine Funktion ist genau dann umkehrbar, wenn jede Parllele zur x-Achse den Graphen höchstens 1x schneidet
- Lehrsatz: Ist die Ausgangsfunktion streng monoton zunehmend, so auch die Umkehrfunktion
- Falls nicht generell monoton, dann nicht global umkehrbar, wir bestimmen die





Monotonieintervalle mittels:

f'(x): $f'(x) < 0$

$f'(x) > 0$

Umkehrprozess:

1. Funktionsgleichung nach **x** auflösen
2. Vertauschen von **x und y**: entspricht einer Spiegelung an der Winkelhalbierenden des **1. und 3. Quadranten**

Eigenschaften und Ableitung der Umkehrfunktion S.106

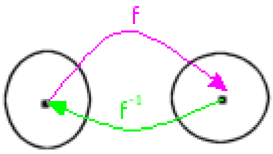
Lehrsatz:

Ist eine umkehrbare Funktion im Intervall D = [a ; b] stetig so ist sie dort streng monoton

$[f^{-1}]^{-1} = f$

1) $f'(x) < 0$

$f'(x) > 0$



2) $f^{-1}[f(x)] = x$

$f[f^{-1}(x)] = x$ <= Umkehrfunktion und Ausgangsfunktion heben sich in ihrer Wirkung insgesamt auf

$y_0 = f(x_0) => x_0 = f^{-1}(y_0)$

$y_0 = f^{-1}(x_0) => x_0 = f(y_0)$

3) Wir können die Ableitung/Steigung der Umkehrfunktion bestimmen, wenn wir sie von der Ausgangsfunktion wissen:

Ist f an der Stelle y_0 differenzierbar und gilt dort $f^{-1} \neq 0$, so ist f^{-1} an der Stelle $x_0 = f(y_0)$ ebenfalls differenzierbar, und es gilt: $[f^{-1}(x_0)]' = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(x_0)]}$

12/2

Vorbereitung auf die 3.Klausur

Logarithmusfunktion S.109

Die natürliche Logarithmusfunktion

$$\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$$

<WH: $n \neq -1$ $n \neq -1$ >

$[g(x) > 0]$

Die Funktion L muss existieren, in unserem bisherigen Funktionsvorrat ist sie nicht enthalten, wir versuchen daher mittels einer Kurvendiskussion Eigenschaften der L-Funktion herauszufinden;

WH:

$\log(u \cdot v) = \log u + \log v$

$\log(\frac{u}{v}) = \log u - \log v$

$\log u^r = r \cdot \log u$ **<= Charakteristische Gleichung**

$\log_a a = 1$ <= Der Logarithmus nimmt auf seiner Basis immer den Stellenwert **1** ein

$\log_a a^x = x$

$\log a^x = x \cdot \log_a a = x \cdot 1$

I Eigenschaften von L S.132

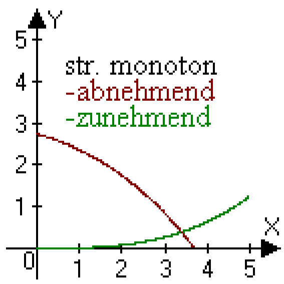
a) Vorzeichenverhalten von L:

$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt; D_L = R^+$

$0 < x < 1 => L(x) < 0$

$x = 1 => L(1) = 0$

$x > 1 => L(x) > 0$

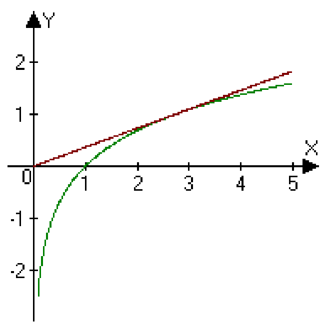


b) Monotonie und Krümmungsverhalten von L:

$L'(x) = \frac{1}{x} > 0$ <= L streng monoton zunehmend

$L''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ <= G_L immer rechtsgekrümmt

Zwischenbilanz:



Der Graph sieht nach einer Logarithmusfunktion aus, wir wissen aber nicht zu welcher Basis und vor allen Dingen wissen wir nicht, ob die L-Funktion die Logarithmischen Rechenregeln und Gesetze erfüllt!

<u>II Nachweis von Regeln und Gesetzen</u>

$L'(x) = \frac{1}{x}$

a) $[L(x \cdot b)]' = \frac{1}{x \cdot b} \cdot b = \frac{1}{x}$

$=> L(x \cdot b) = L(x) + const / c <= \log x + \log b$

$x := 1$; $L(b) = L(1) + const <= \mathrm{L(1) = 0}$

$$\boxed{\begin{array}{l} L(x \cdot b) = L(x) + L(b) \\ L(a \cdot b) = L(a) + L(b) \end{array}}$$

b) $[L(\frac{x}{b})]' = \frac{1}{\frac{x}{b}} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$

$=> L(\frac{x}{b}) = L(x) + const / c$

$x := b$; $L(\frac{b}{b}) = L(b) + const <= L(\frac{b}{b}) = 0$

$=> const = -L(b)$

$$\boxed{\begin{array}{l} L(\frac{x}{b}) = L(x) - L(b) \\ L(\frac{a}{b}) = L(a) - L(b) \end{array}}$$

c) $L(a^n) = L(a \cdot a \cdot a \cdot ...a) <=$ n-mal, wir greifen auf die bewiesenen Rechenregeln zurück

$L(a^n) = L(a) + L(a) + L(a) + ...L(a)$

$= n \cdot L(a)$

$$\boxed{L(a^n) = n \cdot L(a)}$$

$L(a^{-n}) = L(\frac{1}{a^n}) = L(1) - L(a^n) = 0 - n \cdot L(a)$

$$\boxed{L(a^{-n}) = -n \cdot L(a)}$$

<u>Stammbrüche</u>

Ergebnis: $=> L(a^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q} \cdot L(a)$!

<u>Allgemeine Brüche</u>

Ergebnis: => $L(a^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q} \cdot L(a)$

<= Da man jede reelle Zahl R durch einen Bruch approximieren kann, gilt die Gleichung auch für reelle Hochzahlen

Zusammenfassend:

$L(a \cdot b) = L(a) + L(b)$

$L(\frac{a}{b}) = L(a) - L(b)$

$L(a^r) = r \cdot L(a)$ <= Charakteristische Gleichung einer Logarithmusfunktion

Es handelt sich bei L also um eine Logarithmusfunktion, von der wir leider die Basis nicht kennen;

III Wir nennen die Basis einmal *e*

Und auf ihrer Basis nimmt die Logarithmusfunktion immer **1** ein;

a) $L(e) = 1$

b) $L'(x) = \frac{1}{x}$ => $L'(1) = 1$

=> $L(e) = L'(1)$

$L(e) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{L(x) - L(1)}{x - 1}$

$L(e) = L[\lim\limits_{n \to \infty}(1 + \frac{1}{n})^n]$

$$\boxed{\Rightarrow\ e = \lim_{n \to \infty}(1 + \frac{1}{n})^n}$$

Die Basis e lässt sich als Grenzwert einer Zahlenfolge darstellen und es gilt:

$e = \lim\limits_{n \to \infty}(1 + \frac{1}{n})^n$

- ⇨ Eulersche Zahl: $e \approx 2.7182818$ <= nicht periodischer unendlicher Dezimalbruch
- ⇨ als eine transzendente Zahl wie etwa die Kreiszahl π

Namensänderung:

$L(x) = \log_e(x) = \ln(x)$ **<= Logarithmus naturalis**

L ist eine Logarithmusfunktion zur Basis ***e***

Zusammenfassung:

$f: x \mapsto f(x) = \ln x$

mit $D_{\ln} = R^+$; $W_{\ln} = R$

<= ist streng monoton zunehmend, der Graph immer rechtsgekrümmt;

Es gilt:

$f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ **=HDI=>** $f'(x) = \frac{1}{x}$

$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$

Weiter hat ln folgende Eigenschaften:

1) $\ln 1 = 0$
2) $\ln e = 1$
3) $\ln e^x = x \Leftrightarrow e^{\ln x} + x$
4) $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$
5) $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$
6) $\ln x^r = r \cdot \ln x$ mit $(x \in R^+, r \in R)$

Fortsetzung ln:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ <= n darf nicht -1 sein

$\int \frac{1}{x} dx = ?$

$\int_1^x \frac{1}{t} dt = L(x)$

$L'(x) = \frac{1}{x}$ => $L''(x) = -\frac{1}{x^2}$

L-Funktion erfüllt sämtliche logarithmischen Rechenregeln => L-F ist eine Logarithmusfunktion mit „krummer" Basis,

nämlich: $e = \lim\limits_{n \to \infty}(1 + \frac{1}{n})^n$

$\boxed{\text{Ergebnis: } \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x}$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad ; \quad D_{\ln} = R^+$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to +0} (\ln x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} (\ln x) = +\infty$

Der natürliche Logarithmus ist die am langsamsten ansteigende Funktion!!!
Logarithmen sind Hochzahlen:

$\ln x = y = \log_e x \Rightarrow x = e^y$

Weitere Grundformen

Die sog. logarithmische Funktion

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{(x-2)\cdot(x-3)}}$$

$f(x) = [(x-1)\cdot(x-2)^{-1}\cdot(x-3)^{-1}]^{\frac{1}{2}} \mid \ln(\cdot)$ <= auf beiden Seiten Logarithmieren

$$\ln f(x) = \ln[(x-1)\cdot(x-2)^{-1}\cdot(x-3)^{-1}]^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln f(x) = \frac{1}{2}\cdot\ln[...]$$

$$\ln f(x) = \frac{1}{2}[\ln(x-1)-\ln(x-2)-\ln(x-3)] \mid \frac{d}{dx}(\cdot)$$ <= Durch beiderseitiges Logarithmieren vereinfachen des zu differenzierenden Ausdruckes

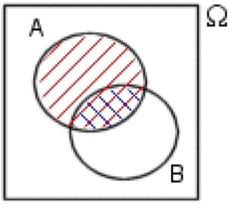
$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \frac{1}{2}[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{(x-2)\cdot(x-3)}}\cdot[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}]$$

<u>Bedingte Wahrscheinlichkeiten</u> S.139

<u>Vorbetrachtung und Definition</u>

Es gibt Situationen, wo das Eintreten eines Ereignisses A „Auswirkungen" hat auf die Wahrscheinlichkeit eines 2. Ereignisses B



Experiment: „Roulettspiel" $\Omega := \{0,1,2...,36\}$

A: „Die 2. Hälfte" $A := \{19,20...,36\}$

B: „Das 2. Dutzend" $B := \{13,14...,24\}$

$P(B/A)$ <= Wahrscheinlichkeit von B, unter der Bedingung, dass A eingetreten ist

$$P(B/A) = \frac{|A\cap B|}{|A|} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

⇨ Theoretisch exakt; Für eine allgemeine Definition ungeeignet

$$P(B/A) = \frac{|A\cap B|}{|A|} = \frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

<u>Allgemeine Defintion:</u>

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A ist gegeben durch:

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}[=P_A(B)];\quad P(A)>0$$

<u>Wichtige Folgerung aus der definierten Gleichung:</u>

P(B/A) „anderweitig bekannt", z.B. vorgegeben oder geeignete Annahmen:

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

=> $P(A\cap B) = P(B/A)\cdot P(A)$ <= Allgemeine Produktregel

3 Ereignisse:

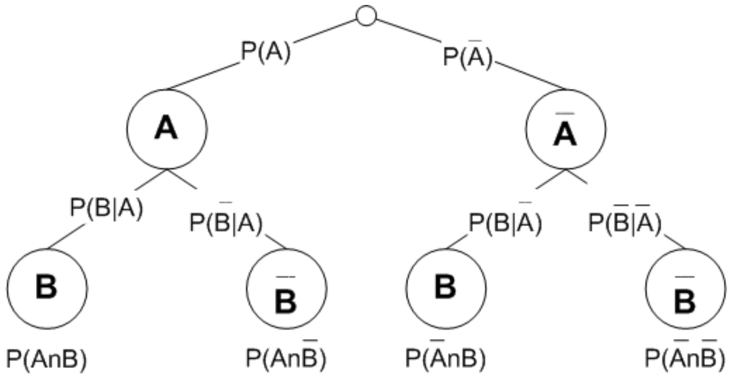
$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/A\cap B)$$

<u>Bedingte Wahrscheinlichkeiten bei zusammengesetzten Experimenten (hintereinander)</u>S.139

<u>Das Baumdiagramm (Ereignisbaum)</u> S.139

Experiment$_1$: mit Ereignissen $A, \overline{A}$

Experiment$_2$: mit Ereignissen $B, \overline{B}$



Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist gleich Produkt der Wahrscheinlichkeiten seiner Zweige:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

Wahrscheinlichkeit längs mehrerer Pfade = Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zweige:

$$P(\overline{B}) = P[(A \cap \overline{B}) \cup P(\overline{A} \cap \overline{B})]$$

$$P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$P(\overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}/A) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}/\overline{A})$$

Abzweigungen ergänzen sich gegenseitig zur 1

Hinweis: Bei Aufgaben häufig Gegenereignis nötig!

<u>Eine neue Integrationsformel</u> S.144

$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$ <= Kettenregel

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C}$$ <= f(x) darf natürlich nicht Null sein!

Merke:
Bei Quotienten von Funktionen zunächst überprüfen, ob der Zähler direkt die Ableitung des Nenners ist oder ob er durch eine Umformung (nicht mit x) zur Ableitung des Nenners überführt werden kann!!!

<u>Grenzwertbetrachtungen mit Hilfe der Regel von l'Hôpital</u> S.144

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ oder: x \to \infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = "\frac{0}{0}" \vee "\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ oder: x \to \infty}} \frac{f'(x)}{f'(g)}$$ <= also: Falls sich unbestimmte Ausdrücke bei einer Grenzwertbetrachtung ergeben, kann man die Regel von l'Hôpital anwenden!

Hinweis: Manchmal muss man einen „unbestimmten" Ausdruck so umformen, dass man l'Hôpital anwenden kann

<u>Die allgemeine Logarithmusfunktion</u> S.145

$f(x) = \log_a x; x \in R^+; a \in R^+ \setminus \{1\}$ <= y ist gleich die Hochzahl, mit der man die Basis a
$y = \log_a x$
potenzieren muss, um x zu erhalten

Wir führen die allgemeine Logarithmus-Funktion auf unsere natürliche Logarithmusfunktion zurück.

$$y = \log_a x <=> a^x = x \mid \ln(...)$$

$$\ln(a^y) = \ln x$$

$$y \cdot \ln a = \ln x$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\boxed{\text{Ergebnis: } f(x) = <\log_a x> = \frac{\ln x}{\ln a} \quad D = R^+; a \in R^+ \setminus \{1\}}$$

Der allgemeine Logarithmus ist im Prinzip ein Ableger des natürlichen Logarithmus. Für ihn gelten die gleichen Rechenregeln wie für den natürlichen Logarithmus

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

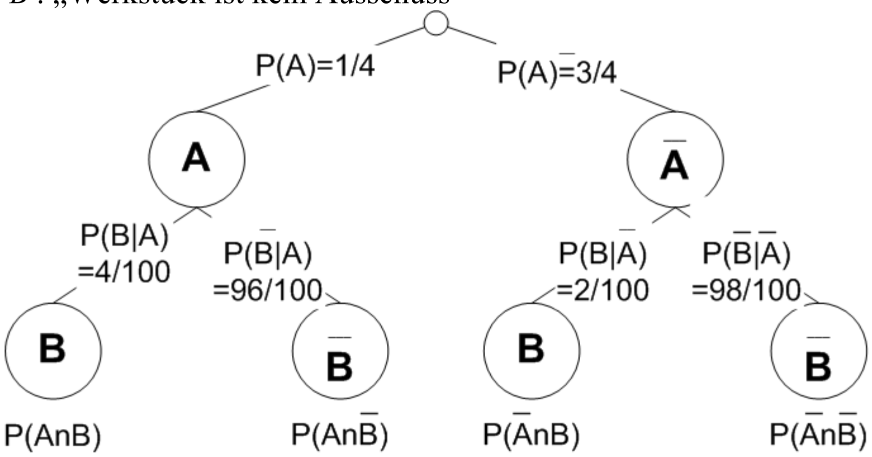
Bayes S.146

Problem:

Maschine M_1 produziert täglich 1000 Werkstücke mit Ausschussanteil 4%; Maschine M_2 produziert täglich 3000 Werkstücke mit Ausschussanteil 2%. Die Werkstücke sind nicht unterscheidbar. Der Gesamtproduktion wird ein Werkstück entnommen und siehe da, es ist ein „Ausschuss". Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es von M_1?

Lösung:

A: „Werkstück stammt von M_1"
$\bar{A}$: „Werkstück stammt von M_2"
B: „Werkstück ist Ausschuss"
$\bar{B}$: „Werkstück ist kein Ausschuss"



$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{100}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{100}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{100}}=0.4$$ <= $P(A/B)$ ist nicht direkt im Baum abzulesen

=> Definition der direkten Wahrscheinlichkeit

$$P(A/B)=\frac{P(A)\cdot P(B/A)}{P(A)\cdot P(B/A)+P(\overline{A})\cdot P(B/\overline{A})}$$ <= Formel von Bayes (FS)

Bayes geht aus von einem „jetzt" eingetretenen Ereignis B, und fragt dann mit welcher Wahrscheinlichkeit ein vorher eingetretenes Ereignis A die Ursache für B ist;

Unabhängigkeit von Ereignissen S.146

Definition von 2 Ereignissen:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{P(A)\cdot P(B/A)}{1}$$ <= Allgemeine Produktregel

Definition:
Zwei Ereignisse A, B heißen stochastisch unabhängig, genau dann wenn gilt:
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

Gilt obige Produktregel nicht, dann heißen die Ereignisse stochastisch abhängig!

Vorsicht: Genau-dann-(⇔)Definition
- ist bekannt, dass A, B unabhängig => Produktregel anwendbar
- ist über A, B nichts vorausgesetzt, dann muss man versuchen die Produktregel nachzuweisen;

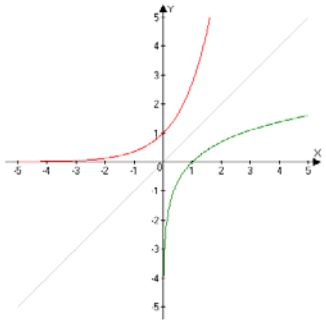
Sind die Ereignisse A, B unabhängig, dann auch die Ereignisse $A,\overline{B};\overline{A},B$

Unabhängigkeit von drei und mehr Ereignissen S.151

Definition:
A, B, C heißen stochastisch unabhängig, genau dann, wenn folgende Produktregeln gelten

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

Gelten diese Beziehungen nicht, dann gelten sie als stochastisch abhängig;



e-Funktion

<= Der ln ist in seinem gesamten Bereich monoton zunehmend und deshalb umkehrbar

Hinweis:
Der Graph der Logarithmusfunktion ist die am langsamsten ansteigende Funktion

Umkehrung des natürlichen Logarithmus ln:

$y = \ln x$

$e^y = x$

Vertauschen:

$y = e^x$

Funktionsschreibweise:

$f(x) = e^x$

$D_{\exp} = R = W_{\ln}; W_{\exp} = D_{\ln} = R^+$

einige relevante Eigenschaften der e-Funktion:

- die natürliche Exponentialfunktion hat keine Nullstelle
- $e^0 = 1$
- $e^1 = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0+$
- exp (Exponentialfunktion) ist streng monoton zunehmend

Wichtige Eigenschaft:
Da ln und e-Funktion Umkehrfunktionen zueinander sind, gilt generell:

$\ln e^x = x \ln e = x \cdot 1$

$e^{\ln x} = x$

$\ln e^{g(x)} = g(x)$

$e^{\ln g(x)} = g(x); [g(x) > 0]$

Für die e-Funktion gelten selbstverständlich die Rechengesetze für Potenzen:

$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$

$\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1 - x_2}$

$(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 \cdot x_2}$

Ableitung und Stammfunktion der Exponential-Funktion S.153

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Leftarrow f'((...)) = \frac{1}{(...)}$

$f^{-1}(x) = e^x$

Allgemein gilt:

$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$

Speziell:

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

Ergebnis:

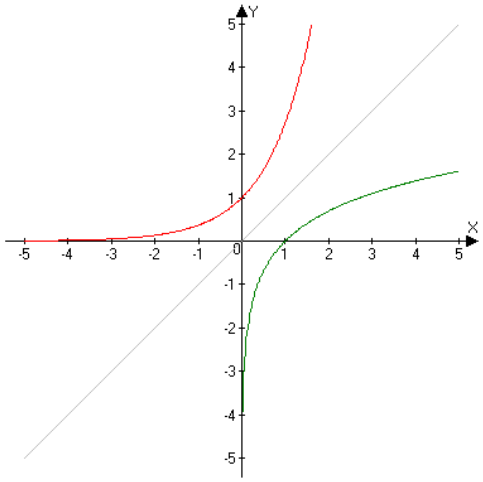
$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$$

$f'(x) = e^x > 0 \Rightarrow \forall x \in R$ <= streng monoton zunehmend

$f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow \forall x \in R$ <= links- gekrümmt

Stammfunktion

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow \int e^x dx = e^x + C$$



$y = e^x$

$y = \ln x$

Elementare Eigenschaften aus dem Graphen ablesbar!!!

Die allgemeine Exponentialfunktion – Integrationsformeln S.153

1) $f(x) = a^x; \quad D_f = R; \quad a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$

$< y = e^x \Rightarrow y' = e^x >$

$y = x^n$ <= Potenzfunktion

$y = a^x$ <= Exponentialfunktion

=> Wir führen die allgemeine Exponentialfunktion auf die natürliche Exponentialfunktion zurück

Allgemein gilt:

$e^{\ln T(x)} = T(x)$ <= Funktion und Umkehrfunktion heben sich gegenseitig auf

$a = e^{\ln a}$

$(...) = e^{\ln(...)}$

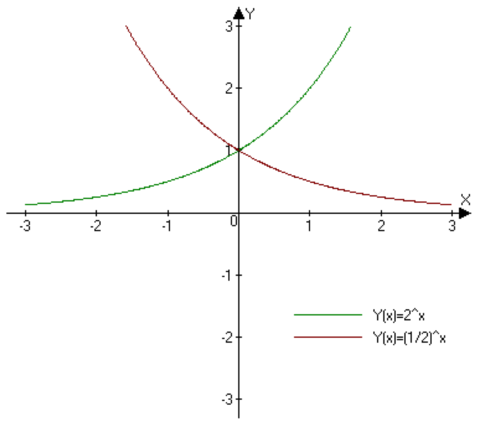
Damit erhalten wir:

$f(x) = a^x$

$f(x) = [e^{\ln a}]^x \qquad \Leftrightarrow a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$

$f(x) = e^{x \cdot \ln a} = a^x$

Ableitungen:



$f(x) = <a^x> = e^{x \ln a}$

$f'(x) = \ln a \cdot e^{x \cdot \ln a}$

- $a \in]0,1[\Rightarrow f'(x) < 0$ <= streng monoton abnehmend
- $a \in]1,\infty[\Rightarrow f'(x) > 0$ <= streng monoton zunehmend
- $y = (\frac{1}{2})^x$
- $y = (2)^x$

$f''(x) = [\ln a]^2 \cdot e^{x \ln a} \Rightarrow f''(x) > 0$ <= immer links - gekrümmt

Wir überprüfen die Symmetrie allgemein

$a \in]1;+\infty[\Rightarrow \frac{1}{a} \in]0;1[$

$f(x) = (\frac{1}{a})^x$

$g(x) = a^x$

$f(-x) = g(x)$ <= Achsensymmetrisch zur y-Achse ($f(-x) = (\frac{1}{a})^{-x} = (a^{-1})^{-x} = a^x = g(x)$)

2) $\int a^x dx = ?$

$\int e^{x \ln a} dx = \frac{1}{\ln a} \cdot e^{x \cdot \ln a} + C$

Hinweis:
Bei so genannten „transzendenten Gleichungen“, die sich nicht formelmäßig auflösen lassen, notfalls Lösungen erraten! z.B. $|x| = 1 + \ln(2 - x^2)$
Bei e-Funktion und ln-Funktion bieten sich folgende x-Werte an: x=1; x=e; x=0;

Anwendungen in der Wissenschaft S.165

Das Wachstumsgesetz

$P(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

$Populationsgröße = GrößezumZeitpunkt0 \cdot e^{Wachtumsrate \cdot Zeit}$

Das Zerfallgesetz

$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Die Bernoulli-Kette S.166

Bernoulli-Experiment

Zufallsexperiment, bei dem man sich nur für 2 Ereignisse interessiert!

A („Treffer“) ; $\overline{A}$ („Niete“)

Bezeichnungen

1 := „Treffer“

0 := „Niete“

Modell-Ergebnisraum

$$\Omega = \{1,0\}$$
$$P(\emptyset) = 0$$
$$P(\{1\}) = p \in [0;1]$$
$$P(\{0\}) = q \in [0;1]$$
$$P(\{0\}) = q = 1 - p$$
$$P(\Omega) = 1$$

Unabhängige Versuche zu einem Bernoulli-Experiment

Wir führen **n** gleiche Bernoulli-Experimente unabhängig hintereinander aus; Dann spricht man von einer Bernoulli-Kette der Länge **n** und der Trefferwahrscheinlichkeit **p**.

Allerdings erhalten wir nun einen neuen Ergebnisraum!!!

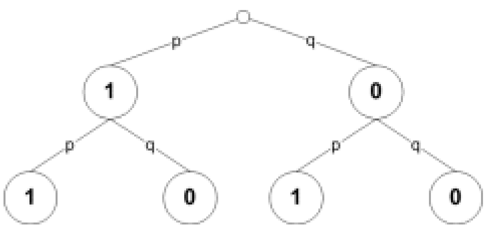
$$\Omega = \{1,0\}^n$$
$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) / x_1, x_2, ..., x_n = 0 \vee 1\}$$

Problem:

Wie bekommen wir für diesen neuen Ergebnisraum einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum?

Lösung:

für n=2 : $\Omega = \{(1,1); (1,0); (0,1); (0,0)\}$



$$P(\{1,1\}) = p \cdot p = P(\{1\}) \cdot P(\{1\})$$
$$P(\{1,0\}) = p \cdot q = P(\{1\}) \cdot P(\{0\})$$
$$P(\{0,1\}) = q \cdot p = P(\{0\}) \cdot P(\{1\})$$
$$P(\{0,0\}) = q \cdot q = P(\{0\}) \cdot P(\{0\})$$

Für n=2 haben wir gefunden $P(\{x_1, x_2\}) = P(\{x_1\}) \cdot P(\{x_2\})$

Allgemein gilt für **n** gleiche und unabhängig voneinander hintereinander durchgeführte Bernoulli-Experimente: $P(\{x_1, x_2, ..., x_n\}) = P(\{x_1\}) \cdot P(\{x_2\}) \cdot ... \cdot P(\{x_n\})$

Die Bernoullische Formel S.169

Sinnvolle Abkürzung:

Z: “Anzahl der Treffer“ (z.B. Z=5, genau 5 Treffer; Z=k, genau k Treffer)

Wie groß ist die **Wahrscheinlichkeit P** in einer **Bernoulli-Kette der Länge n** mit der **Trefferwahrscheinlichkeit p** und der **Nietenwahrscheinlichkeit q**, **genau k Treffer** zu erzielen:

$$P_p^n(Z=k)=?$$

Lösung:

1. $(1,1,1,...,1,0,0,...,0) \Rightarrow P\{1,1,1,...,1,0,0,...,0\} = p^k \cdot q^{n-k}$
2. Es gibt insgesamt $\binom{n}{k}$ solcher Tupel mit genau k „Einsern“ (Treffern)!

Lehrsatz:
Die Wahrscheinlichkeit bei einer Bernoulli-Kette der Länge n genau k Treffer zu erzielen ist gegeben durch:

$$\boxed{\begin{array}{c} P_p^n(Z=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k} \quad n\in N; 0\le k\le n \\ B(n;p;k) \Leftarrow \text{Kurzschreibweise}\end{array}}$$

Summenwahrscheinlichkeit und Binomialverteilung (kumulativ) S.171

Z: „Anzahl der Treffer“

$P_p^n(Z\le k) = P(Z=0)+P(Z=1)+P(Z=2)+....P(Z=k)$ <= höchstens k Treffer

$$=\binom{n}{0}\cdot p^0\cdot q^{n-0}+\binom{n}{1}\cdot p^1\cdot q^{n-1}+...+\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

$$\boxed{\Rightarrow P_p^n(Z\le k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot q^{n-i}}$$ <= Summenwahrscheinlichkeiten (Binomialverteilung)

Nur diese Summenwahrscheinlichkeiten sind tabelliert!!! (und zwar für ausgewählte Parameterwerte p,n,k)

Eventuell andere Wahrscheinlichkeiten müssen auf die Summenwahrscheinlichkeiten zurückgeführt werden.

Beispiel:

$P_p^n(Z\ge k)=1-P_p^n(Z\le k-1)$ <= tabelliert

Bei der Suche:
Erst **p**, dann **n**, dann **k**

Hinweis:
Bei Massenproduktionen, wenn **n** nicht so groß ist, ändert sich **p** praktisch auch dann nicht, wenn man die **n** „Dinge“ ohne Zurücklegen entnimmt!

12/2

Vorbereitung auf die 4.Klausur

Elementare Vektor-Algebra S.181

Der Begriff des Vektors S.181

Die einfachste geometrische Abbildung ist die Parallelverschiebung (Translation)

Eine Verschiebung ist bereits durch einen einzigen Pfeil, z.B.

$\overrightarrow{AA'}$ <= Angriffspunkt - Zielpunkt

eindeutig bestimmt.

Definition:

Die Menge aller parallelgleichen Pfeile (parallel, gleichlang, gleiche Orientierung), die zur selben Verschiebung gehören heißt Vektor $\vec{a}$

Die Hintereinanderausführung zweier Vektoren und ihre Bedeutung S.181

Wir definieren in der Menge V aller Vektoren eine „Addition"

Ein einzelner Pfeil heißt Repräsentant des Vektors

Die hintereinander Ausführung zweier Verschiebungen kann durch eine einzige Verschiebung ersetzt werden:

$$A \xrightarrow{\vec{a}} A' \xrightarrow{\vec{b}} A''$$

$$A \xrightarrow{\vec{c}} A''$$

Man bezeichnet daher den Verschiebungsvektor $\vec{c}$ als Summe der beiden Verschiebungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''}$

Spezielle Vektoren

Gegenvektor: gleiche Länge, gleiche Richtung, entgegengesetzte Orientierung

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ <= zum Nullvektor gehört die „identische Abbildung" (nichts wird verschoben)

Eigenschaften der Vektoraddition

Die nachfolgenden Eigenschaften kann man allesamt zeichnerisch nachweisen. In der Menge V aller Vektoren ist eine Verknüpfung genannt Addition definiert, die folgenden Gesetzen genügt:

1. $\vec{a}, \vec{b} \in V, \vec{c} \in V$ so dass gilt $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ <= Abgeschlossenheit
2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ <= Kommutativität
3. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ <= Distributivgesetz
4. Es gibt ein neutrales Element $\vec{0}$ <= Nullvektor
5. Zu jedem $\vec{a} \in V$ gibt es ein inverses Element $(-\vec{a}) \in V$ <= Gegenvektor zu $\vec{a}$
   , so dass gilt: $(-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Allgemein bezeichnet man jede Menge mit einer beliebigen Verknüpfung, die obigen Gesetzen genügt als eine kommutative Gruppe mit den Gruppenaxiomen G1 bis G5. Die Menge V aller Vektoren ist also bezüglich der Vektoraddition eine kommutative Gruppe.

Beispiele von kommutativen Gruppen
Z ist bezüglich „+" eine Gruppe
Z ist bez. $(\cdot)$, also der Multiplikation keine Gruppe
R ist bez. $(+)$ und R/$\{0\}$ bez. $(\cdot)$ eine Gruppe

Man kann mit Vektoren also bezüglich der Addition genauso rechnen wie mit reellen Zahlen (aber nur bezüglich der Addition)

Die Subtraktion von Vektoren

$\vec{x}+\vec{b}=\vec{a} \mid +(\overrightarrow{-b})$

$\vec{x}=\vec{a}+(\overrightarrow{-b})$

Merke:
Laufe vom Fuß des gesuchten Vektors zu dessen Spitze längs vorgegebener Vektoren und beachte deren Durchlaufsinn

Grafische Veranschaulichung der Lösung

Definition:
Den Differenzvektor von $\vec{a},\vec{b}$ erhält man, indem man zu $\vec{a}$ den Gegenvektor von $\vec{b}$ addiert.
$\vec{a}+(-\vec{b}) =: \vec{a}-\vec{b}$

Hinweis:
Der Summenvektor einer geschlossenen Vektorkette ist stets der Nullvektor

Die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl S.184

Definition:

$\vec{b}=\lambda\vec{a}$; $\lambda \in R$

- $\lambda = 0 : \vec{b}=\vec{0}$ <= Nullvektor
- $\lambda > 0 : \vec{b}=\lambda-$mal so lang wie $\vec{a}$, hat die gleiche Richtung und die gleiche Orientierung
- $\lambda < 0 : \vec{b}=|\lambda|-$mal so lang wie $\vec{a}$, hat die gleiche Richtung, aber die entgegengesetzte Orientierung

Rechenregeln:

S1) Zu $\lambda \in R$ und $\vec{a} \in V$ gibt es genau ein $\vec{b} \in V$: $\lambda\vec{a}=\vec{b}$

S2) $\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\mu\lambda)\vec{a}$ <= gemischtes Assoziativgesetz

S3) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ <= 1. Distributivgesetz

S4) $(\vec{a}+\vec{b})\lambda=\vec{a}\lambda+\vec{b}\lambda$ <= 2. Distributivgesetz

S5) $1\vec{a} = \vec{a}$

Der Betrag eines Vektors / Einheitsvektors S.184

I. Betrag: Unter dem Betrag eines Vektors $\vec{a}$ versteht man (in der Geometrie) seine Länge a in F.E. (Flächeneinheiten)

$|\vec{a}| = a \quad <= \quad a \in R \geq 0$!

II. Vektoren mit dem Betrag 1 bezeichnet man als Einheitsvektoren und schreibt symbolisch $\vec{a}^{\,0}$ mit $|\vec{a}^{\,0}| = 1$;

III. Wie erhält man zu einem beliebigen Vektor b, seinen zugehörigen Einheitsvektor $\vec{b}^{\,0}$

$\vec{b}^{\,0} = \frac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} <=> \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \vec{b}^{\,0}$

Beispiel:

Konstruiere einen Vektor, der in Richtung der Winkelhalbierenden des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b} \in V$ weist!

Lösung:

$\vec{a}^{\,0}$ und $\vec{b}^{\,0}$ spannen eine Raute auf; In einer Raute sind die Diagonalen zugleich Winkelhalbierende.

=> $\vec{a}^{\,0} + \vec{b}^{\,0}$ weist in Richtung der Winkelhalbierenden des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Der Lineare Vektorraum S.185

(siehe Arbeitsblatt)

Die Menge aller Pfeilklassen (Pfeile) bildet also einen linearen Vektorraum

Das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen S.187

Einführendes Beispiel

- Bernoulli-Kette der Länge n
- p : Trefferwahrscheinlichkeit
- Z : Anzahl der Treffer
- $\frac{Z}{n}$: Relative Häufigkeit

Abweichung der relativen Trefferhäufigkeit von der Trefferwahrscheinlichkeit betrage höchstens $\varepsilon \in R^+$

$$\left|\frac{Z}{n} - p\right| \leq \varepsilon <=> -\varepsilon \leq \frac{Z}{n} - p \leq \varepsilon <=> p - \varepsilon \leq \frac{Z}{n} \leq p + \varepsilon <=> n(p-\varepsilon) \leq Z \leq n(p+\varepsilon)$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P für diese Abweichung?

$$P(p-\varepsilon \le \frac{Z}{n} \le p+\varepsilon) = ?$$

Vermutung

Für wachsendes n strebt die Wahrscheinlichkeit gegen **1**, dass sich die relative Trefferhäufigkeit von der Trefferwahrscheinlichkeit um höchstens ε unterscheidet.

Die Ungleichung von Tschebyschew S.188

Vermutung:

$$P(p-\varepsilon \le \frac{Z}{n} \le p+\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Äquivalente Schreibweise

$\Leftrightarrow \; |\frac{Z}{n} - p| \le \varepsilon$

$\Leftrightarrow \; |Z - np| \le n\varepsilon$

Bestätigung der obigen Vermutung durch die Ungleichung von Tschebyschew!

$\frac{Z}{n}$ sei die relative Häufigkeit eines Ereignisses A mit der Trefferwahrscheinlichkeit in einer Bernoulli-Kette der Länge n $(\varepsilon \in R^{+}$ beliebig kleine Größe), dann gilt:

$$\boxed{P(|\frac{Z}{n} - p| \le \varepsilon) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}}$$ <= untere Schranke

bzw.

$$\boxed{P(|\frac{Z}{n} - p| > \varepsilon) < \frac{pq}{n\varepsilon^2}}$$ <= obere Schranke

Tschebyschew-Ungleichung **p** für binomialverteilte Zufallsgröße

Häufig ist die Trefferwahrscheinlichkeit p nicht bekannt, daher eine weitere Vergrößerung obiger Abschätzung. =>

Also gilt:

$$pq = \frac{1}{4}$$

Weitere Vergröberung:

$$P(|\frac{Z}{n} - p| \le \varepsilon) > 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

$$P(|\frac{Z}{n} - p| > \varepsilon) < \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen S.206

Allgemein gilt:

$$P(|\frac{Z}{n} - p| \le \varepsilon) \le 1$$

Tschebyschew-Abschätzung:

$P(|\frac{Z}{n}-p|\leq\varepsilon)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$ <= bei $n\to\infty$ geht $1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$ gegen **1**

Merke:
Bei Grenzwertprozessen werden aus scharfen Ungleichheitszeichen unscharfe Ungleichheitszeichen: $\frac{1}{x}>0;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

Zeigt die relative Häufigkeit eines Ereignisses A mit der Trefferwahrscheinlichkeit p in einer Bernoulli-Kette der Länge n, dann gilt für jede beliebige kleine Abweichung $\varepsilon\in R^+$ folgendes:

$\lim\limits_{n\to\infty}P(|\frac{Z}{n}-p|\leq\varepsilon)=1$ <= Bernoullische Gesetz der großen Zahlen

$P(|\frac{Z}{n}-p|\leq\varepsilon)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$ <= falls $1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}=\beta$ vorgegeben, dann ε und Abweichungsintervall zu berechnen

$P(|\frac{Z}{n}-p|\leq\varepsilon)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$ <= falls $P(|\frac{Z}{n}-p|\leq\varepsilon)$ vorgegeben, dann ε und Wahrscheinlichkeit zu berechnen

Determinanten S.189

Zweireihige Determinanten

lineare Gleichungen mit zwei Variablen

$+ \quad -$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} := a_1b_2 - b_1a_2$$ <= Zweireihige Determinante

Produkt der Hauptdiagonale **-** Produkt der Nebendiagonale

Zweireihige Determinanten treten zunächst einmal auf bei der Lösung von linearen (2;2)-Gleichungssystemen

Lehrsatz (Cramersche Regel)

Liegt ein (2;2)-System in Normalform vor:

I) $a_1x-b_1y=c_1$

II) $a_2x-b_2y=c_2$

dann können wir drei Determinanten bilden:

$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ <= Koeffizientendeterminante

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

mit diesen drei Determinanten erhält man dann folgende Lösungen:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad ; \quad y = \frac{D_y}{D}$$

Sonderfälle:

1. $\begin{matrix} D \cdot x = D_x \\ D \cdot y = D_y \end{matrix}$ $D \neq 0$ <= es existiert genau ein Lösungspaar
2. $D = 0 \wedge (D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0)$ => Gleichungssystem nicht lösbar
3. $D = 0 \wedge (D_x = 0 \wedge D_y = 0)$ => Es gibt unendlich viele Lösungspaare

Eigenschaften zweireihiger Determinanten

$$\begin{array}{l} \qquad\quad | \quad | \ \ \text{Spalten} \\ D_y = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \ \text{- Zeilen} \end{array}$$

Lehrsatz 2:
Eine Determinante kann man stürzen (d.h. Zeilen und Spalten vertauschen), ohne dass sich ihr Wert ändert.

Lehrsatz 3:
Vertauscht man zwei Zeilen oder Spalten einer Determinante, so wechselt die Determinante das Vorzeichen.

Lehrsatz 4:
Wenn eine Spalte (Zeile) einer Determinante aus lauter Nullen besteht, hat die Determinante den Wert Null.

Lehrsatz 5:
Wenn eine Spalte (Zeile) Vielfaches einer anderen Spalte (Zeile) ist, hat die Determinante den Wert Null.

Lehrsatz 6:
Man multipliziert eine Determinante mit einer Zahl, indem man die Elemente einer Spalte bzw. einer Zeile mit dieser Zahl multipliziert

Lehrsatz 7:

$$\begin{vmatrix} a & b+e \\ c & d+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

Lehrsatz 8:
Addiert man zu den Elementen einer Spalte (Zeile) ein beliebiges Vielfaches einer anderen Spalte (Zeile), so ändert sich der Wert der Determinante nicht

Dreireihige Determinanten – lineare Gleichungen mit drei Variablen

$$;+ \quad - \quad +;$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Sprechweise:
Man hat die dreireihige Determinante nach der **1. Zeile** entwickelt unter Vorzeichenbetrachtung

Mit obiger Symbolik ergibt sich folgender Lehrsatz:
Lehrsatz 9 (Cramersche Regel): Liegt ein lineares (3;3)-System in Normalform vor, ergibt sich schließlich im Falle von $D \neq 0$:

$$x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}; z = \frac{D_z}{D}$$ <= siehe Seite 190

Rechenregel für dreireihige Determinanten:
Sämtliche Rechenregeln für zweireihige Determinanten gelten auch für dreireihige Determinanten!

Die Regel von Sarrus

- gilt nur für dreireihige Determinanten!

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$ => Summe der Hauptdiagonalen minus Summe der Nebendiagonalen =>

siehe **Formelsammlung (*Sarrus*)**

Allgemein zählt folgender Lehrsatz 10 (Entwicklungssatz)
Man entwickelt eine Determinante nach den Elementen einer beliebigen Zeile (bzw. Spalte) indem man die Elemente dieser Zeile (bzw. Spalte) jeweils mit ihren zugehörigen Unterdeterminanten multipliziert und die so erhaltenen Produkte (unter Vorzeichenbeachtung)

summiert: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Hinweis:
Bestenfalls Nullen produzieren!

Merke:
Ist eine Zeile (Spalte) Vielfaches einer anderen Zeile (Spalte) oder besteht gar Gleichheit, so hat die Determinante den Wert Null. Diesen Aspekt zunächst überprüfen.

Lineare Abhängigkeit – Untervektorräume S.194

Kollinearität

Wir betrachten die Menge V^1 aller Vektoren $\vec{b} \in V$ die Parallel sind zu einer gegebenen Geraden g, deren Richtung durch einen Vektor $\vec{a} \in V$ festgelegt ist.

Strukturelle Betrachtung:

$V^1 = \left\{\vec{b} / \vec{b} = \lambda\vec{a}; \lambda \in R\right\}$

Bilden eines eindimensionalen Vektorraumes. Vektorraumaxiome verifizieren.

$[\vec{a}]$ <= ist eine Basis von V^1

Geometrische Sichtweise

Kollinearitätsbedingungen I)

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear, wenn $\vec{b} = \lambda\vec{a}$; $\lambda \in R$

Kollinearitätsbedingungen II)

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann kollinear, falls es zwei reelle Zahlen $p, q \in R$ gibt und nicht beide zugleich Null sind, so dass gilt: $p\vec{a} + q\vec{b} \neq \vec{0}$

Komplananität

Wir betrachten die Menge V^2 aller Vektoren $\vec{c} \in V$, die parallel sind zu einer Ebene E, Eine Ebene, die durch zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ festgelegt ist.

Strukturelle Betrachtung:

$V^2 = \left\{\vec{c} / \vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}; \lambda, \mu \in R\right\}$ bildet einen zweidimensionalen Vektorraum ($\vec{a}, \vec{b}$ nicht kollinear, sämtliche Vektorraumaxiome wären zu verifizieren)

[$\vec{a}, \vec{b}$ ist eine Basis von V^2]

Geometrische Sichtweise

Komplananitätsbedingungen II)

Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen komplanar, wenn sich einer durch die beiden anderen ausdrücken lässt, falls also $\lambda, \mu \in R$

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind genau dann komplanar, wenn es 3 reelle Zahlen p, q, r gibt, die nicht alle zugleich Null sind, so dass gilt: $p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = \vec{0}$ <= geschlossene Vektorkette

Wichtige Folgerung aus II)

$[p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = \vec{0}] \wedge$

(λ, μ) $\wedge$ nicht komplanar => $p = 0 \wedge q = 0 \wedge r = 0$

$\neq 0$

Man bezeichnet:

- 2 kollineare Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ => $\vec{b} = \lambda\vec{a}$
- 3 komplanare Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ => $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

- 4 kollokale Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ => $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c}$

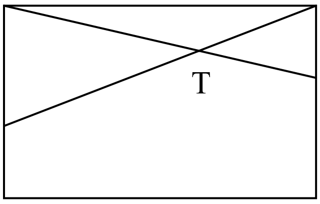
jeweils als **linear abhängig**

Hingegen sind:

- 2 nicht kollineare Vektoren $\vec{a},\vec{b}$ => $\vec{b} \neq \lambda\vec{a}$
- 3 nicht komplanare Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ => $\vec{c} \neq \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

jeweils als **linear unabhängig**

Anwendungen: Teilverhältnisse in ebenen und räumlichen Figuren S.199



In welchem Verhältnis teilen sich die beiden Transversalen [CF] und [DE]? D.h. <<in welchem Verhältnis teilt T die Strecken [CF] und [DE]?>>

Lösung:

- Seiten als Basisvektoren auffassen
- Aus den Transversalen auch Vektoren machen

I. Teilstrecken vektoriell durch ganze Strecke ausdrücken $\overrightarrow{CT} = \lambda\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DT} = \mu\overrightarrow{DE}$

II. Wir suchen eine geschlossene Vektorkette, in der Teilpunkt T als Eckpunkt vorkommt, z.B. $\overrightarrow{DT} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

III. Mit Hilfe von Kollinearität und Komplananität $\mu\lambda$ ausrechnen

Affine Koordinatensysteme S.200

Der zweidimensionale Vektorraum V² und der zweidimensionale Punktraum R² (Ebene)

Kartesisches Koordinatensystem

- Ursprung O
- zwei Basisvektoren
- $\vec{e_1},\vec{e_2}$ mit $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$
- $|\vec{e_1}| = 1 \wedge |\vec{e_2}| = 1$
- $\vec{e_1},\vec{e_2}$ bilden Rechtssystem

$\vec{a} = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$ => $A(2/2)$ <= Der Ortsvektor weist immer vom Ursprung zum Ort des Punktes hin.

Merke:

Der Punkt A und sein zugehöriger Ortsvektor $\vec{a}$ haben die gleichen Koordinaten

Beachte:

Die Koordinaten hängen ab von der zugrunde liegenden Basis des Koordinatensystems

<u>Punkt:</u> $B(x_1 / x_2) = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$

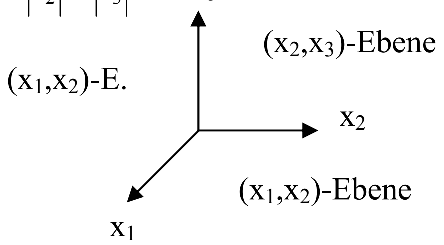
<u>Affines Koordinatensystem</u>

- Ursprung O
- $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$ Basisvektoren von V²
- [0, $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$] bilden ein Koordinatensystem des R²

<u>Punkt:</u> $P(x_1 / x_2) = x_1\overrightarrow{b_1} + x_2\overrightarrow{b_2}$

<u>Der dreidimensionale Vektorraum V³ und der dreidimensionale Punktraum P³</u>

<u>Kartesisches Koordinatensystem</u>

- $[0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}]$
- Rechtssystem
- $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2} \perp \overrightarrow{e_3}$
- $\left|\overrightarrow{e_1}\right| = \left|\overrightarrow{e_2}\right| = \left|\overrightarrow{e_3}\right| = 1$ x_3
- 

<u>Affines Koordinatensystem</u>

- siehe affines Koordinatensystem bei zweidimensionalen Räumen

<u>**Das Rechnen mit Vektoren im Koordinatensystem**</u> S.201

KS $[0, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}]$

$$\vec{x} = x_1\overrightarrow{b_1} + x_2\overrightarrow{b_2} + x_3\overrightarrow{b_3} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = y_1\overrightarrow{b_1} + y_2\overrightarrow{b_2} + y_3\overrightarrow{b_3} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

In einem festen Koordinatensystem ist ein Vektor durch seine Koordinaten eindeutig festgelegt. Deshalb kann man seine Koordinaten verkürzt in Spaltenschreibweise angeben.

<u>Wie schlagen sich die vektoriellen Rechenoperationen in Spaltenschreibweise nieder</u>
<u>Rechenregel I:</u>

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

<u>Rechenregel II:</u>

$$\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\\\lambda x_3\end{pmatrix}$$

<=die gleichen Regeln gelten für den zweidimensionalen Raum

Basisvektoren; Koordinatenursprung

- $O \rightarrow 0\vec{b_1}+0\vec{b_2}+0\vec{b_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
- $\vec{b_1}=1\vec{b_1}+0\vec{b_2}+0\vec{b_3}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
- $\vec{b_2}=0\vec{b_1}+1\vec{b_2}+0\vec{b_3}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
- $\vec{b_3}=0\vec{b_1}+0\vec{b_2}+1\vec{b_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Gleichheit von Vektoren:

$\vec{x}=\vec{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\langle\begin{matrix}x_1=y_1\\x_2=y_2\\x_3=y_3\end{matrix}\right\rangle$ <= Eine Vektorgleichung entspricht 3 Koordinatengleichungen

Hinweis:
Bei überbestimmten Gleichungssystemen (mehr Gleichungen als unbekannte Größen) Endergebnis in anderen Gleichungen überprüfen!

Determinanten und lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit S.203

Eine Determinante hat genau dann den Wert Null, wenn eine Spalte/Zeile ein Vielfaches einer anderen Spalte/Zeile ist.

a) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V^3$, komplanar/linear abhängig $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$

b) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V^3$, nicht komplanar/linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\neq 0$

Das Teilverhältnis τ S.204

Der Punkt T teile die Strecke [AB] im Verhältnis $\tau=\frac{a}{b}$

$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}}=\tau=\frac{a}{b}$ => Streckenschreibweise: $\overline{AT}=\tau\cdot\overline{TB}$

=> $\vec{t}=\frac{\vec{a}+\tau\vec{b}}{1+\tau}$ <= siehe Formelsammlung

Merke:
$\tau > 0 \Rightarrow$ => innerer Teilpunkt T
$-1 < \tau < 0 \Rightarrow$ => T „links“ von A
$-\infty < \tau < -1 \Rightarrow$ => T „rechts“ von B

Näheres siehe Seite 204!

Hinweis:
In einem Parallelogramm halbieren sich die Streckendiagonalen

Parameterform der Geradengleichung im R^3 (bzw. im R^2) S.208
Die Punktrichtungsgleichung
Eine Gerade ist durch einen Punkt $A \in R^3$ und einen Richtungsvektor $\vec{u} \in V^3$ eindeutig gegeben:

Die Gerade hat die Gleichung:
$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$; $\lambda \in R$ <= $\vec{x}$ Ortsvektor eines beliebigen Geradenpunktes

Hinweis:
Ortsvektoren bloß nicht in der Länge verändern!!!
Richtungsvektoren können von der Länge her verändert werden!!!

Projektion von Geraden auf die Koordinatenachsen S.211

Projektionsrichtung immer in Richtung der Basisvektoren/Achsen

I. Wenn ein affines Koordinatensystem vorliegt, dann spricht man von einer schrägen Projektion.
II. Wenn ein kartesisches Koordinatensystem vorliegt, dann spricht man von einer senkrechten Parallelprojektion

Projektion auf:
- (x_1/x_2)-Ebene : *Grundriss*
- (x_1/x_3)-Ebene : *Seitenriss*
- (x_2/x_3)-Ebene : *Aufriss*

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Projektion längs $\vec{b_2}$ in (x_1/x_3)-Ebene (Seitenriss-Ebene):

$$g': \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Man „berechnet“ die Projektion, indem man einfach die jeweilige Koordinate auf Null setzt;

Eine Gerade ist auch durch 2 Punkte $\overline{A, B \in R^3}$ gegeben

$$g_{AB}: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow g_{AB}: \vec{x} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \; ; \; \lambda \in R$$

2-Punkte-Gleichung
(siehe S.212)

Spurpunkte von Geraden S.213

Die Punkte, in denen eine Gerade g die Grundebene durchstößt, heißen Spurpunkte; Je nach Lage der Geraden kann es 1,2 oder 3 Spurpunkte geben;

Spurpunkte S in der:

- Grundriss-Ebene/(x_1/x_2)-Ebene ⇔ x_3-Koordinate ist Null
- Seitenriss-Ebene/(x_1/x_3)-Ebene ⇔ x_2-Koordinate ist Null
- Aufriss-Ebene/(x_2/x_3)-Ebene ⇔ x_1-Koordinate ist Null

Das heißt, man setzt die jeweilige Koordinaten-Gleichung auf Null, rechnet den Parameter λ aus, setzt diesen in die Geradengleichung ein und rechnet den Spurpunkt aus.

Parallele und gleiche Geraden S.214

$$g_1: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$$

$$g_2: \vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{v}$$

zwei Fälle möglich:

a) echt parallel
b) zusammenfallend

a) die Geraden sind echt parallel, wenn gilt: $\vec{u} \parallel \vec{v} \wedge \overrightarrow{AB} \nparallel \vec{u}$
b) die Geraden sind identisch, wenn gilt: $\vec{u} \parallel \vec{v} \wedge \overrightarrow{AB} \parallel \vec{u}$

Sich schneidende und windschiefe Geraden S.215

Im Zweidimensionalen schneiden sich zwei nicht-parallele Geraden immer!

Wir betrachten den dreidimensionalen Raum:

$$g_1: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$$

$$g_2: \vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{v}$$

<= mit $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ => $g_1 \nparallel g_2$

Sind die beiden Geraden nicht parallel, so laufen sie entweder aneinander vorbei (windschief) oder sie können sich schneiden.

⇨ Falls die beiden Geraden sich schneiden, dann liegt der gesuchte Schnittpunkt S auf beiden Geraden. Wir versuchen also einen Ansatz, indem wir die beiden Geradengleichungen gleichsetzen. Führt dieser Ansatz zum Ziel, so haben wir den Schnittpunkt errechnet. Führt er hingegen zu einem Widerspruch, so gibt es keinen Schnittpunkt, dann sind die Geraden also windschief;

Achtung:
Bei Schnittbedingungen müssen neue Parameter eingesetzt werden (λ, μ) !!!

Ergänzung zu Schnitt bzw. Windschiefheit

$g_1 : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$
$g_2 : \vec{x} = \vec{a} + \mu \vec{v}$ <= mit $\vec{u} \nparallel \vec{v} \Leftrightarrow g_1 \nparallel g_2$

a) Geraden schneiden sich:
   - g_1, g_2 liegen in einer Ebene
   - $\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$ komplanar/linear abhängig
   - $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$

b) Geraden sind windschief:
   - $\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$ nicht komplanar/linear abhängig
   - $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) \neq 0$

Ebenen – Parameter-Formen der Ebenengleichung S.216

Die Punktrichtungsgleichung einer Ebene

Eine Ebene E ist durch einen Punkt $A \in R^3$ und durch zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ eindeutig bestimmt:

Punktrichtungsgleichung:

$E : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \; ; \; \lambda, \mu \in R$

Lehrsatz 1:
Durch 3 Punkte $A, B, C \in R^3$, die nicht alle auf der gleichen Gerade liegen ist eine Ebene E eindeutig bestimmt;

Lehrsatz 2:

a) $E_1 \parallel E_2$ genau dann, wenn $\vec{u_1}, \vec{v_1}, \vec{u_2}, \vec{v_2}$ komplanar sind

b) $E_1 = E_2$ genau dann, wenn zusätzlich gilt: $\vec{u_1}, \vec{v_1}$ und $\overrightarrow{AB}$ sind komplanar

⇨ mit Determinanten überprüfen!

Weitere Möglichkeiten eine Ebene E vorzugeben:

Ein Punkt und eine Gerade

Geg:

$A, g : \vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{c}$

Ebene:

$E : \vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{c} + \mu(\vec{a} - \vec{b})$

Zwei „echt parallele“ Gerade

Geg:

$g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$

$g: \vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{v}$

Bedingungen:
$\vec{u} \parallel \vec{v} \wedge \overrightarrow{AB} \nparallel \vec{u}$

Ebene:
$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \overrightarrow{AB}$

<u>Zwei sich schneidende Geraden</u>
Geg:
$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$
$g: \vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{v}$

Bedingungen:
$\vec{u} \nparallel \vec{v} \wedge \det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 0$

Ebene:
$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$

<u>Die Spurgeraden einer Ebene</u> S.220
<u>Merke:</u>
Spurgeraden schneiden sich immer oder 2 Spurgeraden sind parallel

Geg:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Spurgerade auf der Aufriss-Ebene
=> $a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \stackrel{!}{=} 0$ <= unterbestimmtes Gleichungssystem
=> λ durch μ ausdrücken
=> in Ebenen-Formel einsetzen, d.h. nur noch λ vorhanden
=> Spurgerade „ausrechnen“
Spurgerade auf der Seiten-Ebene !
=> das gleiche, nur mit anderen Koordinaten ($a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 = 0$)
Spurgerade auf der Grundriss-Ebene
=> das gleiche, nur mit anderen Koordinaten ($a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 = 0$)

Falls Richtungsvektoren gleich, dann Spurgeraden parallel;

<u>Schnitt von Ebene und Gerade</u> S.222

$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$
$g: \vec{x} = \vec{b} + \gamma \vec{w}$

a) $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0 \Rightarrow g \parallel E \quad \wedge \det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}) = 0 \Rightarrow g \subset E$

b) $\det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}) \neq 0 \Rightarrow g \cap E = \{S\} \Rightarrow g \nparallel E$

<u>Die Schnittgerade zweier nicht paralleler Ebenen</u> S.236

Falls zwei Ebenen nicht parallel sind, dann schneiden sie sich (durchsetzen sie sich) längs einer Geraden g, der so genannten Schnittgeraden.

<u>Wichtig:</u>
Bei Schnittbetrachtungen Parameter verändern

<u>Lösung:</u>

a) auf Komplananität prüfen
b) Gleichsetzen der Gleichungen

<u>Ziel:</u>
Einen Ebenenparameter durch den anderen Parameter der gleichen Ebene ausdrücken

<u>Zufallsgrößen</u> S.237

<u>Einführendes Beispiel</u>
Exp.: Experiment: „Dreimaliges Werfen einer **Laplace-Münze**“
K : Kopf
Z : Zahl

Häufig interessiert nur die Anzahl der K und nicht ihre Reihenfolge **(Informationsverlust, Vergröberung)**
Präzise gesprochen bedeutet dies: Wir definieren eine Funktion (Zufallsgröße X), die jedem Funktionsergebnis $w \in \Omega$ die Anzahl der K zuordnet.

$D_x = \Omega \rightarrow W_x \subset R$

$x : w \rightarrow X_{(w)} = x$ <= Anzahl der geworfenen K

<u>1. Wertetabelle von X</u>

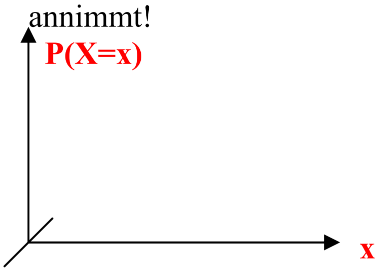
w	$X_{(w)} = x$	P(X = x) => $P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ (Lokale Wahrscheinlichkeit)
(Z,Z,Z) = ZZZ	0	$\frac{1}{8}$
KZZ ZKZ ZZK	1 1 1	$\frac{3}{8}$
KKZ KZK ZKK	2 2 2	$\frac{3}{8}$
KKK	3	$\frac{1}{8}$
		$\sum = 1$

<u>2. Zu jeder Zufallsgröße X gehört eine eindeutige Zerlegung von Ω</u>

$\{w / X(w) = 0\} = \{(Z,Z,Z)\}$

$\{w / X(w) = 1\} = \{(K,Z,Z);(Z,K,Z);(Z,Z,K)\}$
$\{w / X(w) = 2\} = \{(K,K,Z);(Z,K,K);(K,Z,K)\}$
$\{w / X(w) = 2\} = \{(K,K,K)\}$

Kurzschreibweise für obige Ereignisse
$\{w / X(w) = x\} =: "X = x"$ <= Teilmenge von Ω (Ergebnisraum), auf der X den Wert x annimmt!



Zusatz:
Die Zufallsgröße X hat Werte in den Reellen Zahlen; auf diese Weise kann man noch einmal eine Funktion anwenden und erhält so eine neue Zufallsgröße;
Beispiel:
Exp.: „Dreimaliges Werfen einer Laplace-Münze
X: $w \mapsto$ „Anzahl der K“
Y: $(x-1)^2$
⇨ Zwei Zufallsgrößen

$D_x = \Omega \to W_x \subset R$
$w \to x = X(w) \in R$
Eine Zufallsgröße X ist eine Funktion, die jedem $w \in \Omega$ eindeutig eine „Reelle Zahl“ zuordnet;

Hat man eine Zufallsgröße eingeführt, so hat man übersichtliche Schreibweisen und grafische Veranschaulichungen der entsprechenden Wahrscheinlichkeit;

Hinweis:
Falls ein Ereignis zu unübersichtlich erscheint, **Gegenereignis** überprüfen!!!

Unabhängige Zufallsgrößen S.241

- X und Y seien 2 aus dem gleichen Ereignisraum Ω definierte Zufallsgrößen

$X : w \to X(w) \in W_x = \{x_1, x_2, \ldots x_m\} \subset$
$Y : w \to Y(w) \in W_y = \{y_1, y_2, \ldots y_m\} \subset R$

- damit ist es sinnvoll nach folgenden Wahrscheinlichkeiten zu fragen
- $P(X = x \wedge Y = y) = P(\{w \in \Omega / X(w) = x\} \cap \{w \in \Omega / Y(w) = y\})$

Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass X den Wert x „und zugleich“ Y den Wert y annimmt;

Beispiel:
Exp.: „Dreimaliges Unabhängiges Werfen einer L-Münze“
Z : Zahl
K: Kopf

X : $w \mapsto$ „Anzahl der K“

Y : $w \mapsto \begin{cases} \textbf{0}\text{, falls Z beim 1. Wurf} \\ \textbf{1}\text{, falls K beim 1. Wurf} \end{cases}$

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitstafel von X und Y

x \ y		**0**	**1**	**P(X = x)**
0		$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1		$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
2		$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$
3		0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
P(Y = y)		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sum = 1$

P(X = 1)

P(Y = 0)

⇨ **P(X=1 $\wedge$ Y=0)**

⇨ da also $P(X = x \wedge Y = y) \neq P(X = x) \cdot P(Y = y)$, sind beide Ereignisse stochastisch abhängig!!!

Wir erkennen:
Die Zeilensummen liefern die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Werte von X die Spaltensummen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Werte von Y.

Das heißt, dass der gemeinsame Wahrscheinlichkeitstafel von X und Y lässt sich sowohl die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X als auch die von Y bestimmen.

Man spricht daher von:
P(X=x) und P(Y=y) auch von der Randwahrscheinlichkeiten der Verteilung P(X=x $\wedge$ Y=y)

Wichtige Definition:
Zwei Zufallsgrößen X und Y heißen stochastisch unabhängig, genau dann, wenn für alle $x \in W_x$ und $y \in W_y$ gilt: $P(X = x \wedge Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstafel muss dann generell die Form einer Multiplikationstafel haben!

Näheres über Wahrscheinlichkeitstafeln bei Gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten:

Man erhält am Rande (Randwahrscheinlichkeiten) durch **Addition** die Wahrscheinlichkeitsverteilung der einzelnen Zufallsgrößen zurück, ohne diese vorher explizit berechnet zu haben.

Eine Wahrscheinlichkeitstafel, die die Form einer Multiplikationstabelle hat, d.h. dass generell gilt: $P(X = x \wedge Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$

⇨ daraus folgt, X und Y stochastisch unabhängig!

Die Verteilungsfunktion S.244

(entspricht Summenwahrscheinlichkeiten)

Beispiel:

$\wp$: „Werfen zweier Laplace-Würfel“

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2; |\Omega| = 36$

X: „Augensumme“

$W_x = \{1,2,3,4...,12\}$

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

=> $P(X \leq 6,7) = P(X = 2) + P(X = 3)... = \sum_{i=1}^{5} P(X = x_i) = \sum_{x_i = 6,7} P(X = x_i)$

Wahrscheinlichkeitsverteilung = Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Wertes

Verteilungsfunktion = Aufsummierte Wahrscheinlichkeiten

Definition:

X sei eine Zufallsgröße mit Wertemenge

$$\boxed{W_x = \{x_1, x_2, x_3, ...x_m\}}$$

und der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$\boxed{P(X = x_u) \ [u = 1,2,3,...,m]}$$

Die zugehörige Verteilungsfunktion (Summenwahrscheinlichkeiten) ist folgendermaßen definiert:

$$\boxed{F(x) := P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_u)}$$

Merke:

$F(x) := P(X \leq x) = \sum_{x_\mu \leq x} P(X = x_u)$

$\Leftrightarrow$ ist F bekannt, lassen sich weitere Wahrscheinlichkeiten berechnen:

$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

$\Leftrightarrow$ $X > a$ zu $X \leq a$

$P(X > a) = 1 - P(X \le a) = 1 - F(a)$

Hinweis:
Man kann die Hypergeometrische Verteilung unter gewissen Umständen durch die Binomialverteilung approximieren;

Maßzahlen von Zufallsgrößen S.246

Erwartungswert (in der Praxis der Mittelwert)

Wie rechnet der Lehrer den Mittelwert μ einer Schulaufgabe aus?

$\mu = \dfrac{1 \cdot z_1 + 2 \cdot z_2 + 3 \cdot z_3 + \ldots 6 \cdot z_6}{n}$ <= Wie oft gab es jede Note, durch die Anzahl aller Noten

$\mu = 1 \cdot \dfrac{z_1}{n} + 2 \cdot \dfrac{z_2}{n} + 3 \cdot \dfrac{z_3}{n} \ldots 6 \cdot \dfrac{z_6}{n}$ <= Relative Häufigkeiten

Wichtig:
Die relative Häufigkeit eines Ereignisses in der Praxis, entspricht in der Theorie seiner Wahrscheinlichkeit;

Definition:
X sei eine Zufallsgröße mit Wertemenge $W_x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m\}$ und Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X = x_i)$;
Dann versteht man unter dem Erwartungswert folgende Größe:

$$\mu = E(x) := \sum_{i=1}^{m} [x_i \cdot P(X = x_i)]$$

Eigenschaften des Erwartungswertes (ohne Beweis) S.247

- der Erwartungswert einer konstanten Zufallsgröße: E(konst.) = konst.

Lehrsatz:
$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$

Die Varianz und die Streuung S.248

X sei eine Zufallsgröße mit der Wertemenge: $W_x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m\}$ und dem Erwartungswert:
$\mu = E(x)$ <= als berechnet vorausgesetzt

Unter der Varianz von X versteht man folgende Größe:

$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$ <= durchschnittliche Quadratische Abweichung!

Streuung bzw. Standardabweichung σ:

$\sigma := \sqrt{Var(X)} \iff \sigma^2 = Var(X)$

Folgerung aus der Definition

- konstante Zufallsgröße:
  - Var(konst.) = (konst. – konst.) $\cdot P(...)$ = 0
  - Var(konst.) = 0

Formt man die Definitionsgleichung der Varianz um, so erhält man folgende besser zu handhabende Beziehung:

$$\boxed{\begin{aligned} &Var(X) = E(X^2) - \mu^2 \\ &Var(X) = E(X^2) - [E(x)]^2 \\ &Var(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i{}^2 \cdot P(X = x_i) - [\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(X = x_i)]^2 \end{aligned}}$$

Wir benötigen ein Maß, wie weit die Werte einer Zufallsgröße X durchschnittlich von ihrem Erwartungswert abweichen; diese Standardabweichung ist σ