Mathematik Leistungskurs
K13

Kursleiter: *Peter Klüpfel*
Autor dieses Skripts: *Benedikt Kämpgen*

Grün = Analysis; Rot = Stochastik; Blau = Geometrie

Inhaltsverzeichnis

13/1

Mathematik Leistungskurs

Vorbereitung auf die 1.Klausur

WH:

Erwartungswert (in der Praxis = Mittelwert):

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(X = x_i)$$

Varianz

$$\text{Var(x)} = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

Lehrsatz:

$$\text{Var(x)} = \text{E(x}^2) - [\text{E(x)}]^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \cdot P(X = x_i) - [\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(X = x_i)]^2$$

Die Ungleichung von Tschebyschew für allgemeine Zufallsgrößen S.1

a) WH: Ungleichung von Tschebyschew für binomial verteilte Zufallsgrößen

$P(|\frac{Z}{n} - p| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$ <= Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit von der Trefferwahrscheinlichkeit um höchsten so viel abweicht

$$P(|\frac{Z}{n} - p| > \varepsilon) < \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

Für gröbere Abschätzung: $pq \leq \frac{1}{4}$ setzen!

b) Allgemeine Ungleichung von Tschebyschew

Geg:

beliebige Zufallsgröße X (Wir definieren eine Funktion, die jedem Funktionsergebnis $w \in \Omega$ die Anzahl x der K zuordnet)

mit Wertemenge $W_x := \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, Erwartungswert μ = E(X) und positiver Varianz $\sigma^2 = Var(x)$ [Varianz darf nicht Null sein!]

Dann gilt folgendes: $P(|X - \mu| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{Var(x)}{\varepsilon^2}$ $\sigma = \sqrt{Var(x)} \Leftrightarrow \sigma^2 = Var(x)$

$P(|X - \mu| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{Var(x)}{\varepsilon^2}$ => untere Schranke

$P(|X - \mu| > \varepsilon) < \frac{Var(x)}{\varepsilon^2}$ => obere Schranke

Sehr wichtig! Echte Ungleichung von Tschebyschew

Häufig wird die Standardabweichung (Streuung σ) als Einheit für die Abweichung genommen, d.h. man setzt: $\varepsilon = t \cdot \sigma \quad t \in R^+$

Damit würden sich die Ungleichungen folgendermaßen spezialisieren:

$$P(|X-\mu| \leq t\sigma) > 1-\frac{\sigma^2}{(t\sigma)^2} = 1-\frac{1}{t^2}$$

$$P(|X-\mu| > t\sigma) > \frac{1}{t^2}$$

Summen von Zufallsgrößen S.4

Definition:

$\boxed{X+Y: (x_i\,;\, y_k) \mapsto x_i + y_k}$

Allgemeine Beziehungen für Erwartungswert und Varianz S.4

Erwartungswert:

$E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$ => gilt auch für mehrere Summanden

einfachste Variante:

$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$ => Der Erwartungswert von Summen ist die Summe der Erwartungswerte

Varianz:

Die nachfolgenden Beziehungen gelten nur dann, falls die beteiltigten Zufallsgrößen *stochastisch unabhängig* sind!

$Var(aX+bY) = a^2Var(X)+b^2Var(Y)$ => gilt auch für mehrere Summanden

einfachste Variante:

$Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$ => Die Varianz einer Summe ist die Summe der einzelnen Varianzen

Spezialfall:

Wir bilden das arithmetische Mittel einer Zufallsgröße:

$\overline{X} = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$ => arithmetische Mittel => alle X_i sind gleichverteilt, d.h. haben X_υ

gleiche Wertemenge und gleiche W'keitsverteilung (praktisch Kopien voneinander)

Erwartungswert:

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu$$

$$= \frac{1}{n}\cdot E(X_1+X_2+...+X_n) = \frac{1}{n}[E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n)]$$

=> $\boxed{E(\overline{X}) = \mu}$

Der Erwartungswert des arithmetischen Mittels stimmt überein mit dem zugehörigen Erwartungswert der Zufallsgröße

Varianz:

$$\boxed{\Rightarrow \mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\overline{\sigma} = \sqrt{Var(\overline{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Interpretation der Aufgaben:
In einer sehr langen Versuchsabfolge weicht das arithmetische Mittel mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit nur noch sehr wenig vom Erwartungswert ab.

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von zwei unabhängigen Zufallsgrößen X und Y S.10

X mit $W_x = \{x_1,x_2...x_m\}$
Y mit $W_y = \{y_1,y_2...x_j\}$

$Z = X + Y$ mit $W_z = \{z/\ z = x_\nu + y_\lambda\ ;\ \nu = 1, \ldots, m\ ;\ \lambda = 1, \ldots, j\}$

$$P(Z=7) = \sum_{x_\nu + y_\lambda = 7} P(X = x_\nu \wedge Y = y_\lambda) = \sum_{x_\nu + y_\lambda = 7} P(X = x_\nu) \cdot P(Y = y_\lambda)$$ <= sehr wichtig!

Lehrsatz 4:

$$P(Z=z) = \sum_{x_\nu + y_\lambda = Z} P(X = x_\nu \wedge Y = y_\lambda) = \sum_{x_\nu + y_\lambda = Z} P(X = x_\nu) \cdot P(Y = y_\lambda)$$

Die Binomialverteilung und Näherungsformel für diese Ungleichungsformel S.11
WH: Grundlegende Begriffe
Einfaches Experiment:
0 = Niete
1 = Treffer; W = {0,1}
Trefferw'keit: $p \in [0,1]$
Nietenw'keit: $q = 1-p$
führt man ein Bernoulli-Experiment n-Mal unabhängig hintereinander durch, so erhält man eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferw'keit p;
Wertemenge von Ω besteht aus vielen n-Tupel;
$\Omega = \{(0,0,...,0),...,(0,1,1,...,1),...,(1,1,...,1)\}$

Häufig interessiert nicht die genaue Struktur von Ω, sondern nur die Anzahl der 1/Treffer; Wir haben also eine Abbildung kreiert, die jedem n-Tupel die Anzahl der Treffer zuordnet;

X: Anzahl der Treffer; $W_x = \{0,1,2,3,...,k,...,n)$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}; \qquad x = 0,1,2,...,n$$

Der Erwartungswert und Varianz binomial-verteilter Zufallsgrößen S.12

$$P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}; \quad W_x = \{0,1,2,3,...,n\}$$

X = Anzahl der Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n
k = feste Trefferzahl

$$E(X) = \mu = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$Var(X) = \sigma^2 = \sum_{k=0}^{n} (k-\mu)^2 \cdot P(X=k) \Rightarrow E(x^2) - [E(x)]^2 \text{ (Formelsammlung)}$$

- ⇨ $E(X) = E(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$
- ⇨ $E(X) = \mu = np$
- ⇨ $\sigma^2 = Var(X) = Var(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ <= stochastisch unabhängig!
- ⇨ $Var(X) = npq$

<u>Die allgemeine Ungleichung von Tschebyschew spezialisiert auf binomialverteilte Zufallsgrößen</u> S.12

$$P(|X - E(x)| \le c) \ge 1 - \frac{Var(x)}{c^2}$$ <= gilt für jede beliebige Zufallsgröße mit positiver Varianz

Aus der allgemeinen Tschebyschew-Ungleichung haben wir die spezielle T-Ungleichung für binomial-verteilte Zufallsgrößen erhalten:

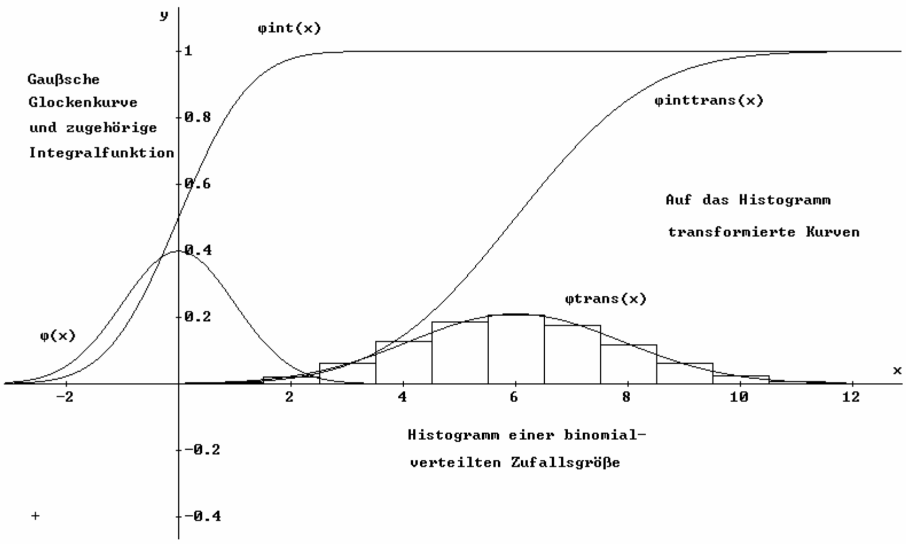
$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \le c\right) \ge 1 - \frac{pq}{nc^2}$$ => also mit welcher Mindestw'keit weicht die relative Häufigkeit von der Trefferwahrscheinlichkeit um höchstens so viel ab.

<u>Näherungsformeln für die Binomialverteilung</u> S.14

<u>Die Normalverteilung</u>

<u>Elementare Betrachtungen über die Gauß'sche Glockenkurve und die zugehörige Integralfunktion</u>

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Gauß'sche Glockenkurve

- normierte Funktion
- Flächeninhalt unterhalb der Kurve: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$
- Als Wahrscheinlichkeitsfunktion brauchbar

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

=> gibt Flächeninhalt unter der Gauß'schen Glockenkurve an, in Abhängigkeit von der oberen Grenze x;
=> Für Summenwahrscheinlichkeiten relevant
=> Wegen Achsensymetrie: $\phi(-x) = \phi(x)$
=> Wegen Punktsymetrie zu 0,5: $\Phi(-x) = 1 - \Phi$

Wir können die Gauß'sche Glockenkurve mittels der Parameter $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{npq}$ auf die Histogramme der Binomialverteilung transformieren;

$P_p^n(X = x) \approx \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ => W'keitsverteilung/lokale W'keit

$P_p^n(X \le x) \approx \Phi(\frac{x-\mu+\frac{1}{2}}{\sigma})$ => eigentliche Summenw'keit

<=> brauchbar für $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q > 9$!!!

Häufig auftretende Funktionswerte, sowie die zugehörigen Stellen sind in eigenen kleinen Tabellen gefasst, sog. Quantile

Manchmal muss man eine Beziehung so umformen, dass wir die Ausdrücke
$P(|\frac{X}{n} - p| \le \varepsilon)$ oder $P(|X - E(X)| \le \varepsilon)$ durch die Normalverteilung approximieren können =>

Umformung:

$P(|\frac{X}{n} - p| \le \varepsilon)$

$= P(p - \varepsilon \le \frac{X}{n} \le p + \varepsilon)$ <= Ausdruck jetzt bereit für die Approximation

$= P(\mu - n\varepsilon \le X \le \mu + n\varepsilon)$

$= P(X \le \mu + n\varepsilon) - P(X \le \mu - n\varepsilon - 1)$

$$\approx \Phi\left(\frac{\mu + n\varepsilon - \mu + \frac{1}{2}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - n\varepsilon - 1 - \mu + \frac{1}{2}}{\sigma}\right)$$

$$= 2\Phi\left(\frac{n\varepsilon + \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right) - 1$$

Der zentrale Grenzwertsatz S.21

wir betrachten wieder allgemeine Zuffalsgrößen speziell Summen von allgemeinen Zufallsgrößen; (keine Bernoulli-Kette)

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ seien beliebige, unabhängige Zufallsgrößen mit den Erwartungswerten $\mu_1 = E(X_1), \mu_2 = E(X_2), \mu_3 = E(X_3), \ldots, \mu_n = E(X_n)$ und den Varianzen $\sigma^2{}_1 = Var(X_1), \sigma^2{}_2 = Var(X_2), \sigma^2{}_3 = Var(X_3), \ldots, \sigma^2{}_n = Var(X_n)$;

Wir bilden die Summe:

$X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$

$\mu = E(x) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_n$

$\sigma^2 = Var(x) = \sigma^2{}_1 + \sigma^2{}_2 + \sigma^2{}_3 + \ldots + \sigma^2{}_n$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2{}_1 + \sigma^2{}_2 + \sigma^2{}_3 + \ldots + \sigma^2{}_n}$ <= wichtig, Fehlerquelle

dann gilt für eine entsprechend große Zahl n von Summanden die folgende Approximation:

$P(X \leqslant x) \approx \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ <= relevant sind nur μ und σ

Die Summen-Zufallsgröße ist also annähernd normal-verteilt;

Die gebrochen-rationale Funktion S.25

Wiederholen der Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$ <= Formelsammlung

Beispiel für gebrochen-rationale Funktion: $f(x) = \frac{x^2 + 4}{(2x^2 - 5)^3} = \frac{Polynom 2. Grades}{Polynom 6. Grades}$

Durch die Differentiation gelangen mitunter Nullstellen des Nenners (also Defintionslücken der Funktion) in den Zähler. Diese Vielfachheiten müssen unbedingt herausgekürzt werden, sonst wird die ganze Aufgabe völlig überfälscht!

Überlegungsskizze eines Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion ohne Bildung von Ableitungen:

$f(x) = y = \frac{x - 4}{2x}$ $\quad D_f = R \setminus \{0\}$

NST:

f(x) = 0 ⇔ x-4 = 0 ; x = 4

Wie verhält sich der Graph bei Annäherung an seine Definitionslücke/Polstelle:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{x-4}{2x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{x-4}{2x} = +\infty$$

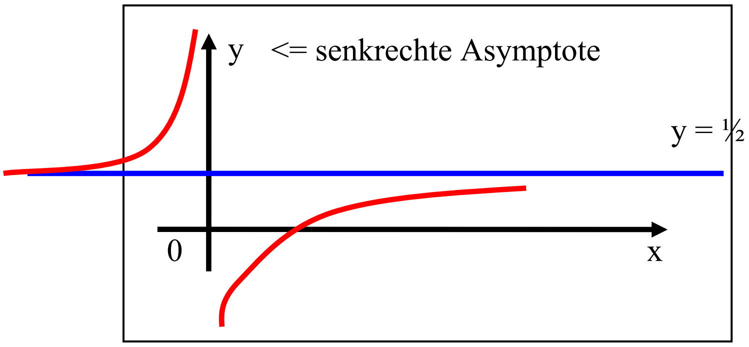
<u>Wie verhält sich der Graph im Unendlichen:</u>

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-4}{2x}$$ <= so keine Entscheidung möglich, da $\frac{\infty}{\infty}$!

<u>Rezept</u>: Entweder l'Hôpital oder kürze durch die höchste x-Potenz des Nenners!

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\frac{4}{x}}{2} = \frac{1}{2}$$

<u>Übungsskizze:</u>



<= waagerechte Asymptote

0 = Definitionslücke/Polstelle

<u>Merke:</u>

An den Definitionslücken/Polstellen liegen senkrechte Asymptoten vor; Eventuell vorhandene Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ liefern waagerechte Asymptoten;

<u>Beachte:</u>

Der Verlauf des Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion wird in erster Linie durch seine Asymptoten bestimmt;

<u>Die Defintion der gebrochen-rationalen Funktion</u> S.26

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{5x^4 + 3x^2 - 2x + 5}{3x^2 + 6x + 1}$$ <= Im Zähler und im Nenner stehen Polynomfunktionen

$D_f = R \setminus \{x \,/\, h(x) = 0\}$

- Wenn eine einfache Nullstelle des Nenners vorliegt, liegt auch eine „einfache Polstelle“ vor
- Wenn eine doppelte Nullstelle des Nenners vorliegt, liegt auch eine „zweifache Polstelle“ vor

<u>Merke:</u>

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{(x+5)(x^2 - 2x + 1)} = \frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)(x^2 - 2x + 1)} = \frac{x-5}{x^2 - 2x + 1}$$

(x+5) kann man aus dem Nenner vollständig herauskürzen, d.h. x = -5 ist also eine „stetig behebbare“ Definitionslücke!

Also:

- kommt im Nenner ein Faktor $(x-x_0)^m$ vor, der sich vollständig herauskürzen lässt, so ist x_0 eine „*stetig behebbare*" Defintionslücke;
- Wenn der Funktionsterm „vollständig gekürzt" ist und im Nenner ein Faktor $(x-x_0)^n$ stehen bleibt, so spricht man von diesem x_0 als von einer **Polstelle n-ter Ordnung**;
- „vollständig kürzen" = die Funktion **„faktorisieren" (also Produkte/Faktoren herstellen)**, z.B. aus $\begin{array}{c} ax^2+bx+c=0 \\ a(x-x_1)(x-x_2) \end{array}$ oder *binomische Formeln* anwenden

Die h-Methode:

Beispiel:

$$f: x \mapsto f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x+1}{x} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$x_0 = 0$ ist eine Nullstelle von h(x), aber keine Nullstelle von g(x)

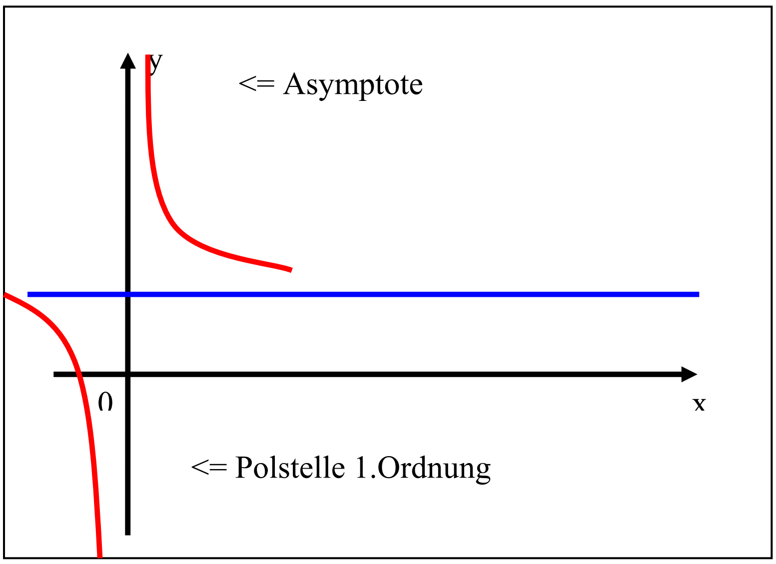
$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{h \to +0} f(x_0+h)$$

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = \lim_{h \to +0} f(x_0-h)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to +0} f(0+h) = \lim_{h \to +0} f\left(\frac{0+h+1}{0+h}\right) = \lim_{h \to +0} f\left(\frac{h+1}{h}\right) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to +0} f(0-h) = \lim_{h \to +0} f\left(\frac{0-h+1}{0-h}\right) = \lim_{h \to +0} f\left(\frac{h+1}{h}\right) = -\infty$$

Polstelle 1.Ordnung bei $x_0 = 0$!



y=1 <= Asymptote

> Wichtig:
> Bei Polen **ungerader** Ordnung wechselt f(x) das Vorzeichen, bei Polen **gerader** Ordnung **nicht**!

Verhalten im Unendlichen: S.30

Ergebnisse:

- ist der Grad des Zählerpolynoms (höchste x-Potenz) größer als der Grad des Nennerpolynoms so gilt generell: $\lim_{x \to \pm\infty} |f(x)| = \infty$
- Ist der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms, so gilt generell: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$
- Haben Zählerpolynom und Nennerpolynom den gleichen Grad, so gilt generell: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a}{b}$, wobei **a** der Faktor der höchsten x-Potenz im Zähler und **b** der Faktor der höchsten x-Potenz im Nenner ist;

<u>Abschließende Betrachtungen über Asymptoten:</u> S.30

<u>Senkrechte Asymptote</u>
der Graph hat eine zur y-Achse parallele Asymptote (SENKRECHTE Asymptote) mit der Gleichung $x=x_0$

<u>Waagerechte Asymptote</u>
Wenn der Grad des Zähler-Polynoms kleiner oder gleich ist dem des Nenner-Polynoms (siehe vorherige Grenzwertbetrachtungen), dann hat der Graph eine zur x-Achse parallele Asymptote (WAAGERECHTE Asymptote) mit der Gleichung $y=y_0$

<u>Schiefe Asymptote</u>
Der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion hat genau dann eine schiefe Asymptote (SCHIEFE Asymptote), wenn gilt: $\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$
Dies ist genau dann der Fall, wenn der Grad des Zähler-Polynoms um „genau eins" größer ist als der Grad des Nennerpolynoms!

Um die Funktion der Asymptote zu erhalten führt man zuerst eine Polynomdivision durch um die „Asymptotische Darstellung" der Funktion, und damit den Teil „(ax + b)" und den Teil, der wenn $x \to \pm\infty$ gegen Null geht zu erhalten: $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

<u>WH: Integralberechnung:</u>

$$A(a) = \int_{-6}^{a} [f(x) - g(x)]dx \Rightarrow A(a) = \int_{-6}^{a} [-\frac{4}{x+4}]dx \Rightarrow -4[\ln|x+4|]_{-6}^{a} \Rightarrow$$
$$-4\ln|a+4| - (-4)\ln|-6+4| \Rightarrow 4\ln 2 - 4\ln|a+4| ...$$

<u>Wichtig:</u>

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

13/1

Vorbereitung auf die 2.Klausur

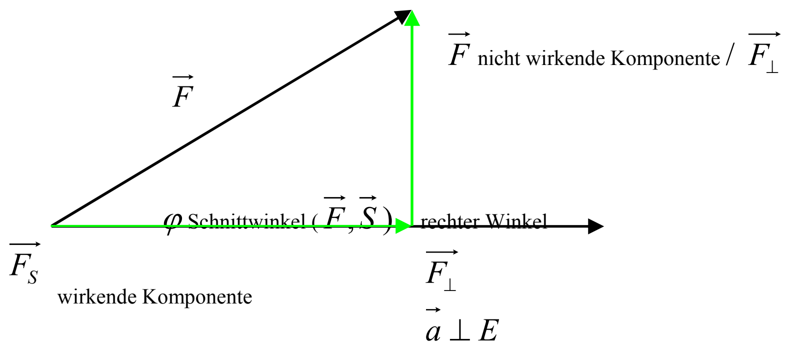
<u>Analytische Geometrie</u>

<u>Das Skalarprodukt (zweier Vektoren)</u> S.33

<u>Defintion und Eigenschaften</u> S.33

<u>Physikalische Vorüberlegung</u>

Arbeit	=	$\overrightarrow{Kraft} \cdot \overrightarrow{Weg}$
$\in R$ Skalar		Vektor Vektor
W	=	$\vec{F} \cdot \vec{S}$



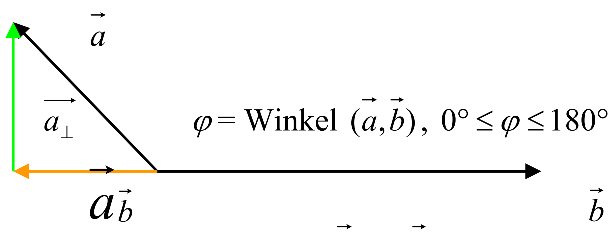
<u>Damit können wir schreiben:</u>

$\vec{F} \cdot \vec{S} = \vec{F_S} \cdot \vec{S}$

$= |\vec{F}| \cdot \cos\varphi \cdot |\vec{S}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{S})$

<u>Mathematische Definition:</u>

Für 2 Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ soll gelten:



senkrechte Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}),$

$\in V^3 \cdot \in V^3 \in R$

<u>3 Rechenregeln ohne Beweis</u> S.33

R1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (Kommutativgesetz)

R2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (Distributivgesetz)

R3) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{b}\lambda) = \lambda \cdot (\vec{a}\vec{b})$ (gemischtes Assoziativgesetz)

<u>Warnung:</u>

1. Durch Vektoren **kann** man nicht **dividieren**
2. Es gibt kein **Assoziativgesetz** zwischen **3 Vektoren**

<u>Folgerung aus der Definition:</u>

1) <u>Kollinearität</u>

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

2) <u>Orthogonalität</u>

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \ ; \ (\vec{a} \neq \vec{0}; \vec{b} \neq \vec{0})$

3) Betrag (Länge) eines Vektors

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{a})$ reine Symbolik: $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

4) Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

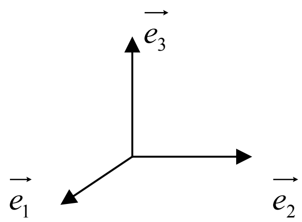
<u>Elementar geometrische Anwendungen</u>
(siehe Heft S.34)

LE = Länge des Vektors

<u>Wichtige Prinzipien:</u>
- Betragsquadrat ist Vektor mit sich selbst multipliziert
- Orthogonalität ausnutzen;

<u>Koordinatendarstellung des Skalarproduktes bezüglich *kartesischer* Koordinaten</u> S.35

<u>Kartesisches KS:</u>



<u>Eigenschaften:</u>

- $\vec{e}_i \perp \vec{e}_k ; i \neq k$
- $|\vec{e}_i| = 1$
- Rechtssystem

<u>Wir legen uns für die Basisvektoren eine Multiplikationstabelle an:</u>

Multiplikation	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	1	0	0
$\vec{e}_2$	0	1	0
$\vec{e}_3$	0	0	1

Damit ergibt sich für beliebige Vektoren:

In einem kartesischen Koordinatensystem gilt:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

Der Betrag (Länge) eines Vektors

$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a} \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

Lehrsatz:

In einem kartesischen Koordinatensystem gilt: $|\vec{a}|=\sqrt{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$

Erkennungsmerkmal für Einheitsvektoren:

$|\vec{a}^{\,0}|=1$

$\sqrt{a_1{}^{0\,2}+a_2{}^{0\,2}+a_3{}^{0\,2}}=1$

Winkel zwischen zwei Vektoren:

$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ => Winkel $(\vec{a},\vec{b})$ <= bei Schnittwinkel immer kleinerer Winkel! (180°-x)

Betrachtungen mit Einheitsvektoren S.36

Hat man einen Einheitsvektor, so sind seine Koordinaten die **Richtungskosinus**!
Mitunter wichtig bei Aufgabenstellungen, bei denen ein Einheitsvektor gesucht wird, der mit den Koordinatenachsen gewisse Winkel einschließt.

$$\vec{a}^{\,0}=\begin{pmatrix}a_1^0\\a_2^0\\a_3^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(a_1^0,\vec{e}_1)\\\cos(a_2^0,\vec{e}_2)\\\cos(a_3^0,\vec{e}_3)\end{pmatrix}$$ <= nur bei Einheitsvektoren

Kreisgleichung in R² und Kugelgleichung in R³ S.37

Kreis: $(x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2=r^2$ <= Kreis- und Kugelgleichung siehe FS

Kugel: $(x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2+(x_3-m_3)^2=r^2$ <= siehe Formelsammlung

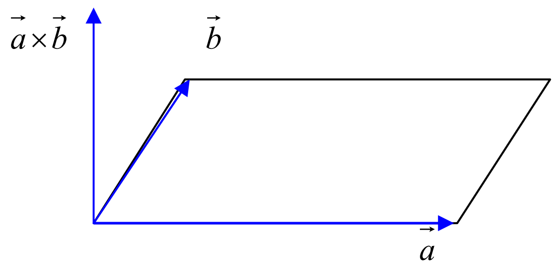
Hinweise:

- Der Mittelpunkt eines Dreieckumkreises ist der Schnittpunkt der **Mittelsenkrechten**
- Nur im R² gilt: $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

- Falls Punkte auf der Kreislinie liegen, dann müssen durch Koordinaten die Kreisgleichung oder die Kugelgleichung erfüllt werden
- Gleichseitige Pyramide: 3 gleiche Seitenflächen und Grundfläche (Vierflach = Tetraeder), besitzt Umkugel (alle Eckpunkte liegen auf der Kugeloberfläche mit Mittelpunkt M und Radius r

<u>**Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) im R³**</u> S.40

<u>Definition und Eigenschaften</u>



A = $|\vec{a}\times\vec{b}|$

<u>Definition:</u>

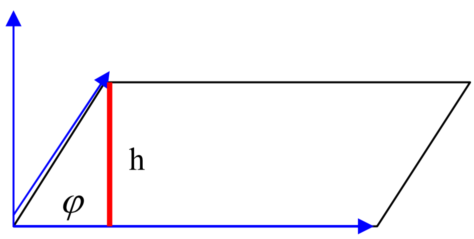
Unter dem Vektorprodukt von $\vec{a},\vec{b}\in V^3$ versteht man den durch folgende drei Eigenschaften eindeutig bestimmten Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$:

D1) $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}\wedge\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$

D2) $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

D3) $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ist gleich der Maßzahl des Flächeninhaltes des von $\vec{a},\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

<u>Folgerung:</u>



$\sin\varphi=\dfrac{h}{|\vec{b}|}$ => $h=|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$

D3) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})$

<u>Rechenregeln ohne Beweis</u>

R1) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ <= Alternativgesetz

R2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ <=Distributivgesetz

R3) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

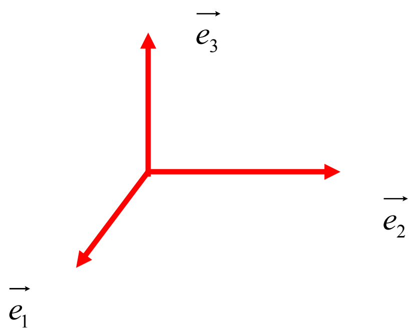
$\vec{a}\parallel\vec{b}$ <=> $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ <= weder Vektor a noch b dürfen aber Nullvektoren sein

Warnung: Durch Vektoren darf man nach wie vor nicht dividieren (Beweis siehe S.40)

Wichtig:

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ <= gilt nur in R²

Darstellung des Vektorproduktes bezüglich kartesischer Koordinaten S.41



<= „senkrecht stehen", „Rechtssystem",
$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$

Multiplikationstabelle:

x	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	$\vec{0}$	$\vec{e}_3$	$-\vec{e}_2$
$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_3$	$\vec{0}$	$\vec{e}_1$
$\vec{e}_3$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_1$	$\vec{0}$

Lehrsatz:

Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ gilt:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \text{ <= nur kartesischem Koordinatensystem}}$$

Hinweis: Größte Fehlerquote = Vorzeichen!!!

Zum Spatprodukt: S.43

(siehe AB)

Ergebnisse:

Volumen V des von den Vektoren a, b und c aufgespannten Spats (kart. KS)

$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ <= Formelsammlung

Lehrsatz:

In einem kartesischem Koordinatensystem gilt:

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ <= Formelsammlung}}$$

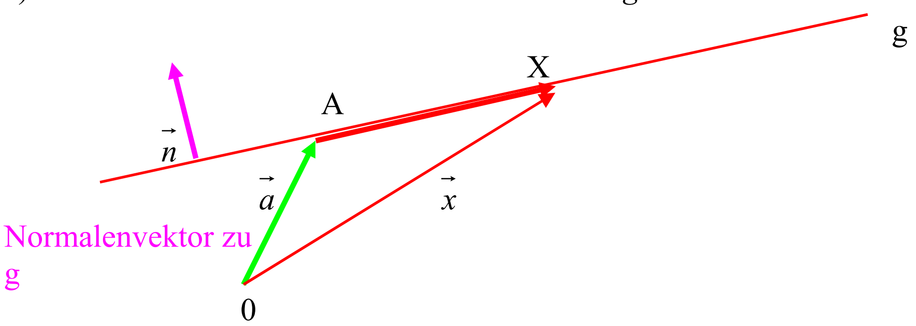
Volumen V einer von den Vektoren a, b und c aufgespannten Pyramide:

$V = \frac{1}{6}\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ <= Formelsammlung

Normalenform von Geradengleichungen im R² und Ebenengleichungen im R³ S.42

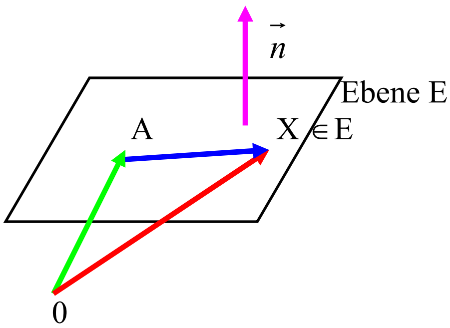
Die Punktnormalenformen S.42

a) x $\in g$



Der Vektor $\vec{n}$ steht senkrecht auf g und damit senkrecht auf dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{AX}$

b)



$\vec{n} \perp \overrightarrow{AX}$, falls X $\in$ E

$\vec{n} \perp (\vec{x} - \vec{a})$, falls X $\in$ E

$\Leftrightarrow \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$, falls X $\in$ E

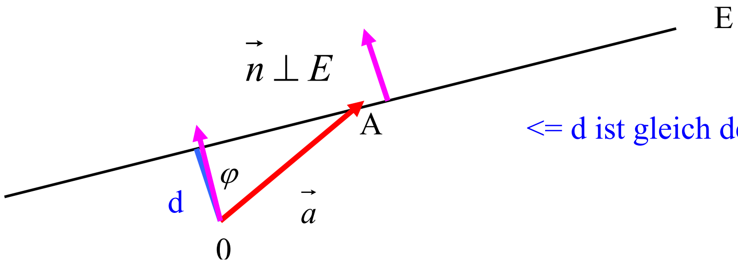
Eine Ebene ist durch einen Punkt A und einen Normalen-Vektor $\vec{n}$ ebenfalls eindeutig bestimmt;

Lehrsatz:

Eine Ebene in R³ (bzw. Gerade in R²) ist eindeutig festgelegt durch einen Normalen-Vektor $\vec{n}$ und einem Punkt A in der Ebene (bzw. auf der Geraden): Ihre Gleichungen lauten:

$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$, dies ist die Punktnormalenform (PNF)

Warnung:
Obige Gleichung gilt für Geraden nur im R²;
Geometrische Deutung von: $\vec{n} \cdot \vec{a}$:



<= d ist gleich der Abstand der Ebene zum Ursprung

$$\cos\varphi = \frac{d}{|\vec{a}|} \Rightarrow d = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{n}, \vec{a}) \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{a} = |\vec{n}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{n}, \vec{a}) \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{a} = |\vec{n}| \cdot d$$

Ergebnis:
Das Produkt $\vec{n} \cdot \vec{a}$ ist der $|\vec{n}|$-fache Abstand der Ebene E zum Ursprung

Hinweis:
- Wenn man in einer Aufgabe in der Gleichung einer Ebene oder Geraden das $\vec{n} \cdot \vec{a}$ ausmultipliziert und somit die Kenntnisse über den Vektor $\vec{a}$ verliert, ist das die Allgemeine Normalenform (ANF)
- Wenn eine Ebene oder Gerade so $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$ bzw. so $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ dargestellt ist, nennt man dies die Parameterform

Wichtige fundamentale Aufgaben: S.45/46

Wichtig: $\vec{m} = \frac{1}{2}[\vec{a} + \vec{b}]$ <= Mittelpunkt einer Strecke

Die HESS'sche Normalenform (HNF) S.46

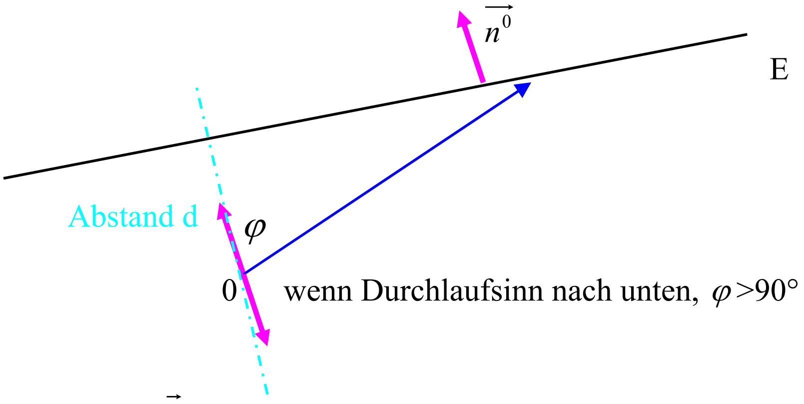
E: $\vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ (PNF)
E: $\vec{n} \cdot \vec{x} - c = 0$ (ANF) <= c ist $|\vec{n}|$-fache Abstand der Ebene zum Ursprung
$\vec{n}$ steht senkrecht auf der Ebene, kann aber beliebige Länge und beliebigen Durchlaufsinn haben;

1.Normierung der Länge
$\vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \quad |:|\vec{n}|$

$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \vec{x} - \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\vec{a} = 0$ <= $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\vec{a}$ ist Abstand d der Ebene vom Ursprung

$$\boxed{\Leftrightarrow \overrightarrow{n^0} \cdot \vec{x} - \overrightarrow{n^0} \cdot \vec{a} = 0}$$

Gegebenfalls,
2.Normierung des Durchlaufsinnes



<u>Forderung:</u> $d = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi \geq 0$
Falls d < 0 sein sollte müssen wir die ganze Gleichung mit -1 durchmultiplizieren!

<u>Lehrsatz:</u>
Ist eine Ebene im R³ (Gerade in R²) durch einen Punkt A und einen Normalen-Einheitsvektor $\vec{n^0}$ gegeben, dann lautet ihre Gleichung: $\vec{n^0} \cdot \vec{x} - d = 0$ <= d ist Abstand zur Ebene/Geraden, d > 0

- Dabei muss d = $\vec{n^0} \cdot \vec{a}$ größer Null sein, dann gibt **d** den Abstand der Ebene/Geraden vom Ursprung an;
- $\vec{n^0}$ weist dann stets vom Ursprung hin zur Ebene (siehe Skizze)

<u>Abstandsberechnungen</u>

S.48

<u>1. Abstand zweier paralleler Ebenen (Geraden in R²)</u>

$E_1 : \vec{n^0} \cdot \vec{x} - d_1 = 0$

<= HNF

$E_2 : \pm\vec{n^0} \cdot \vec{x} - d_2 = 0; d_1 > d_2$

⇨ Abstand: $(+\vec{n^0}) : d_1 - d_2$; $(-\vec{n^0}) : d_1 + d_2$

<u>2. Abstand eines Punktes P von einer Ebene E (bzw. Geraden in R²)</u>

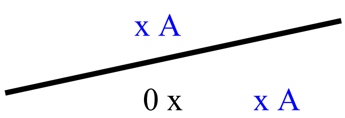
$E : \vec{n^0} \cdot \vec{x} - d = 0$ <= HNF

Lösung: Hilfsebene H durch P parallel zu E

Lehrsatz:
Man erhält den gerichteten Abstand d_P eines Punktes P von einer Ebene E (Geraden im R²) indem man den Ortsvektor $\vec{p}$ des Punktes P in die HNF der Ebenengleichung einsetzt:

$d_P = \vec{n^0} \cdot \vec{p} - d$

Ist $d_P > 0$ => P und O liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene
Ist $d_P < 0$ => P und O liegen auf derselben Seite der Ebene



3. Anwendung

a) Sind 2 *parallele* Ebenen gegeben $(E_1 \parallel E_2)$ und ist E_1 in Parameterform und E_2 in HNF gegeben:

- ⇨ „Startpunkt" von E_1 in HNF von E_2 einsetzen
- ⇨ Abstand $(E_1; E_2)$

b) Sind zwei *windschiefe* Geraden gegeben:

- ⇨ Parallele Ebene in g_2 zu g_1 konstruieren
- ⇨ Abstand des Startpunktes von g_1 zur Hilfsebene durch g_2 ausrechnen

Abstand eines Punktes von einer Geraden im R³

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; P(5/0/0)$$

- ⇨ Hilfsebene H durch P senkrecht zu g (PNF)
- ⇨ Ermittelung des Durchstoßpunktes S von g auf H
  - o $a)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad b)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot [\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}] = 0$
  - o a) in b) einsetzen
- ⇨ Entfernung von S und P ist der gesuchte Abstand e

Anwendung im R³

Wie kann man den Abstand zweier paralleler Geraden im R³ bestimmen?

Lösung: Es genügt den Abstand des Punktes $B \in g_2$ zu berechnen (siehe Abstand eines Punktes von einer Geraden im R³)

Achsenabschnittsform S.50

$$\boxed{E: \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1 \Leftarrow \text{a, b, c sind die Achsenabschnitte}}$$

Also: x_1-Achse wird an Stelle a, x_2 an Stelle B und x_3 an Stelle c geschnitten

Wichtige Aufgaben S.51

a) Gleichung der senkrechten Projektion einer Geraden auf eine Ebene

- ⇨ Gerade bilden durch Durchstoßpunkt und senkrecht projizierten Punkt A
- ⇨ Berechnung von $\vec{a}'$: $\vec{a}' = \vec{a} - d_A \overrightarrow{n^0} \Leftarrow$ d_A ist Abstand des Punktes A von der Geraden, also Ortsvektor des Punktes A plus entgegengesetzte (also minus) d_A-fache Richtung des Normalenvektors von der Ebene

Schnitte von Geraden und Ebenen S.52

Schnitte von Geraden

1. Verfahren (gilt im R² und R³)

g_1 und g_2 sind beide in Parameterform gegeben.

⇨ Gleichsetzungsverfahren und Schnittpunktberechnung

2. Verfahren (gilt nur im R^2)
g_1 liegt in Parameterform vor, g_2 liegt in Normalenform vor
⇨ Erst überprüfen ob Geraden sich schneiden, dann eine Gleichung in andere einsetzen

3. Verfahren (gilt nur in R^2)
g_1 und g_2 liegen in Normalenform vor
⇨ Erst überprüfen ob Geraden sich schneiden, dann erhält man zwei Gleichungen mit 2 Unbekannten, also Gleichungssystem einfach lösen

Die Schnittgerade zweier Ebenen E_1 und E_2

1. Verfahren
E_1 und E_2 sind beide in Parameterform gegeben
⇨ Gleichsetzungsverfahren (siehe K12)

Unbedingt empfehlenswert eine Ebene in Normalenform umwandeln und dann zweites Verfahren unbedingt anwenden

2. Verfahren
Eine Ebene in Parameterform und eine in Normalenform
⇨ Gleichung der einen Ebene in andere Gleichung einsetzen eine Variable auslöschen und Gleichung der Gerade ausrechnen

3. Verfahren
Beide Ebenen sind in Normalenform gegeben
⇨ Eine Ebene in Parameterform zurückverwandeln, dann 2. Verfahren anwenden (Rettungsanker: 3 Punkte „*suchen*“ A, B, C, dann Ebene in Parameterform umwandeln)

Umwandlung:
Beispiel:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 5 = 0$$

Wähle: $x_2 = \lambda \in R \;;\; x_3 = \mu \in R$

Einsetzen: $x_1 + 2\lambda - 3\mu = 5 \Rightarrow x_1 = 5 - 2\lambda + 3\mu$

Lösungen geschickt anordnen:

$$x_1 = 5 + \lambda(-2) + \mu 3$$
$$x_2 = 0 + \lambda 1 + \mu 0$$
$$x_3 = 0 + \lambda 0 + \mu 1$$

Nun vektorielle Schreibweise:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir unser 2.Verfahren anwenden!

Wichtig:
Immer erst überprüfen, ob Ebenen/Geraden nicht womöglich **parallel**

Der Schnittpunkt einer Ebene und einer Geraden

1. Verfahren

g und E sind beide in Paramterform gegeben

- ⇨ Gleichsetzungsverfahren (siehe K12)

2. Verfahren

E ist in Normalenform, g in Parameterform gegeben

- ⇨ Eine Gleichung in andere einsetzen, Schnittpunkt berechnen

(Vorbereitung auf die 3./4.Klausur)

Uneigentliche Integrale

S.55

Uneigentliche Integrale erster Art (das Integrations-Intervall ist nicht beschränkt)

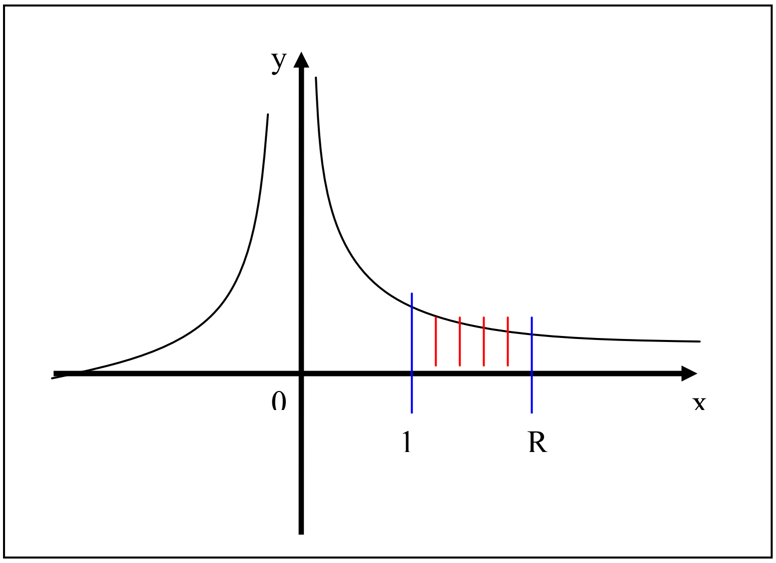
Definition:

Die Funktion $x \to f(x)$ sei für $x \geq a \in R$ definiert

Existiert der Grenzwert $\int_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$ (also kein ∞),

dann heißt $\int_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$ uneigentliches Integral **1.Art**

Beispiel:



$f(x) = \frac{1}{x^2} \ldots D_f = R \setminus \{0\}$

Symbolisch:

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}$

Integrationsintervall zunächst verkürzen:

$\lim_{R\to\infty} \int_a^R \frac{1}{x^2} dx$

Anschließend Bilden des Grenzwertes:

$\lim_{R\to\infty} [-\frac{1}{x}]_1^R = \lim_{R\to\infty} [-\frac{1}{R} - (-\frac{1}{1}] = 1$

Wichtig:

Potenzen werden integriert, indem man die Hochzahl um 1 erhöht und die neue Hochzahl in den Nenner schreibt!

Speziell:

$$a \in R^+ \wedge k > 1 => \int_a^\infty \frac{1}{x^k}dx = -\frac{a^{-k+1}}{1-k}$$

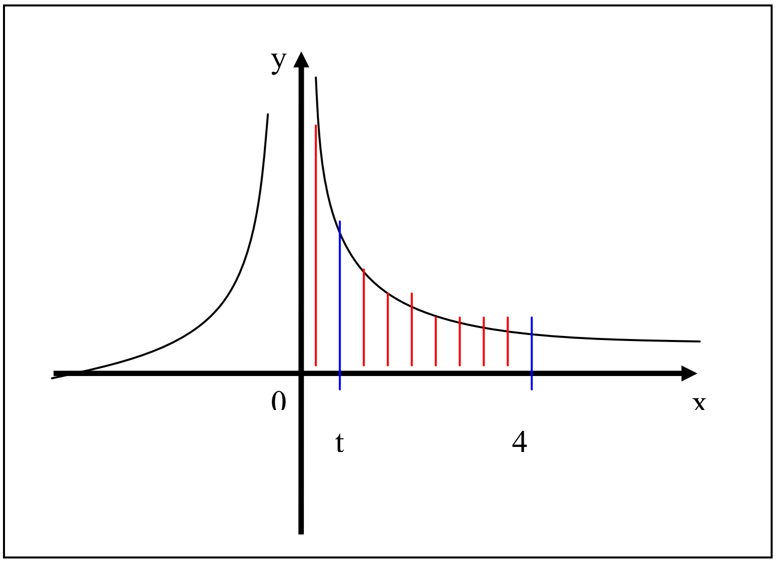
<= (FS!)

Uneigentliche Integrale zweiter Art (die Integrandenfunktion ist nicht beschränkt)

Definition:
Ist die Funktion $f(x)$ im Intervall $]a,b]$ integrierbar, aber am linken Intervallrand nicht beschränkt; und existiert trotzdem der Grenzwert $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)dx$, so heißt

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)dx$ uneigentliches Integral **2.Art**

Beispiel:



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}; x \in R$$

$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0+}\int_t^4 x^{-\frac{1}{2}}dx$ <= Integrationsintervall zunächst verkürzen, anschließend Grenzwert bilden

$= \lim_{t\to 0+}[2\sqrt{x}]_t^4$

$= \lim_{t\to 0+}[2\sqrt{4} - 2\sqrt{t}] = 4$ F.E.

Speziell:

$a \in R^{+} \wedge 0 < k < 1 \Rightarrow \int_0^a \frac{1}{x^k} dx = \frac{a^{-k+1}}{-k+1}$ <= FS!

Ergänzende Betrachtungen zur Analysis S.59

Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers um die x-Achse

$$V_0 = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Allgemeine Achsensymmetrie

G_f ist symmetrisch bezüglich $x = x_0$

$\Leftrightarrow f(x_0 - d) = f(x_0 + d)$

Symmetrie bezüglich eines beliebigen Punktes (x_0 / y_0) (G_f muss nicht unbedingt durch diesen Punkt gehen)

$f(x_0 + d) - y_0 = y_0 - f(x_0 - d)$

$\Leftrightarrow f(x_0 + d) + f(x_0 - d) = 2y_0$

$f(x_0 + d) + f(x_0 - d) = 2f(x_0)$

Wiederaufnahme der Stochastik S.58

Wiederholung kombinatorischer Grundelemente S.58

1. Permutation aus einer n-Menge
   - Anordnung, keine Wiederholungen
   - $n!$
2. k- Tupel aus einer n-Menge
   - Anordnung, Wiederholungen
   - n^k
3. k- Permutationen aus einer n-Menge
   - Anordnung, keine Wiederholungen
   - $\frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}$ <= Formelsammlung
4. Mississippi- Formel
   - Anordnung, Wiederholung, Anzahl der Permutationen von n Elementen, wobei je n_i Elemente untereinander gleich sind (i = 1,2,3...p)
   - $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_p!}$
5. k- Teilmenge aus eine n- Menge
   - keine Anordnung, keine Wiederholungen
   - $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
6. Anzahl der Kombinationen zu je k Elementen aus n verschiedenen Elementen mit Wiederholungen dieser Elemente

- $\binom{n+k-1}{k}$

Testen von Hypothesen S.58

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden aus „gegebenen“ W’keiten andere berechnet! In der Statistik versucht man aufgrund von Stichproben Informationen über unbekannte W’keiten **p** zu gewinnen.

Zwei signifikante Fragestellungen:

1. Für p kommen nur 2 Werte p_1, p_2 in Betracht. Welcher ist der richtige? (Alternativtest)
2. Ist p gleich einem vermuteten Wert p_0? (Signifikanztest)

Einführende Beispiele von Signifikanz-Tests S.61

Von einem Tetraeder wird vermutet, dass es sich um einen Laplace-Tetraeder handelt.

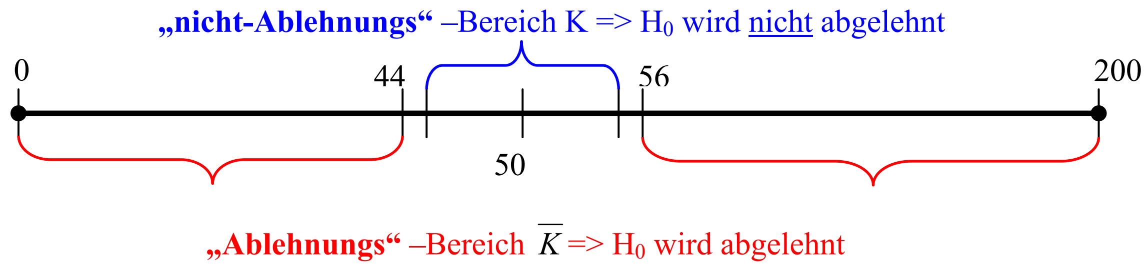
Z: Anzahl der geworfenen „1er“

H_0: Trefferwahrscheinlichkeit p = $\frac{1}{4}$ <= Nullhypothese, eine durch die Aufgabenstellung ausgezeichnete Hypothese;

H: $p \in [o;1] \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$ <= Alternativhypothese

Um diese Hypothese zu überprüfen, führen wir eine Stichprobe der Länge n=200 durch (d.h. eine Bernoulli-Kette der Länge n=200 mit der vermuteten Trefferw’keit $p = \frac{1}{4}$)

Bevor der Test abläuft, legen wir uns Bereiche fest für **„nicht-Ablehnung“** bzw. **„Ablehnung“** unserer Nullhypothese.



- Zweiseitiger Test, da „Ablehnungs“ –Bereich zu beiden Seiten

Das Testen von Hypothesen zieht unweigerlich zwei mögliche Fehlentscheidungen nach sich:
Fehler 1.Art: H_0 ist wahr und wird irrtümlich „abgelehnt“
Fehler 2.Art: H_0 ist falsch und wird irrtümlich „nicht-abgelehnt“

Die Wahrscheinlichkeiten obige Fehler zu begehen bezeichnet man entsprechend:
Risiko 1.Art
Risiko 2.Art

Berechnung des Risikos 1.Art

- H_0 ist wahr: $p = \frac{1}{4}$
- H_0 wird irrtümlich abgelehnt: $Z \in \overline{K} = \{0,1,2...44\} \cup \{56,57...199,200\}$

R1A:

$P_{\frac{1}{4}}^{200}(Z \in \overline{K}) = P_{\frac{1}{4}}^{200}(Z \le 44 \vee Z \ge 56)$

in Tabellenform bringen:

$P_{\frac{1}{4}}^{200}(Z \le 44) + 1 - P_{\frac{1}{4}}^{200}(Z \le 55)$

im Tafelwerk schauen...

$\approx 37\%$

Antwort:

Das Risiko 1.Art beträgt ungefähr 37%

Interpretation:

Man wird H_0, obwohl wahr, mit einer W'keit von 37% ablehnen. Also, bezogen auf unsere Aufgabe einen Laplace-Tetraeder mit einer W'keit von 37% irrtümlich für einen nicht-L-Tetraeder halten;

Berechnung des Risikos 2.Art

- H_0 ist falsch: $p \ne \frac{1}{4}$; $p = 0.2$
- H_0 wird irrtümlich nicht-abgelehnt: $Z \in K = \{45,...,55\}$

R2A:

$P_{0.2}^{200}(Z \in K) = P_{0.2}^{200}(45 \le Z \le 55)$

$P_{0.2}^{200}(Z \le 55) - P_{0.2}^{200}(Z \le 45 - 1)$ <= in tabellierbare Form bringen

$\approx 21\%$

Antwort:

Das Risiko 2.Art beträgt ungefähr 21%

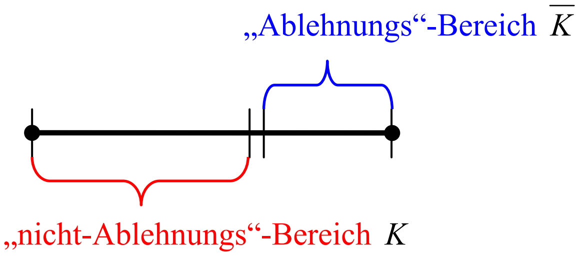
Interpretation:

Man würde mit einer W'keit von 21% irrtümlich die Hypothese H_0 nicht-ablehnen, obwohl sie falsch ist. Also, bezüglich unserer Aufgabe, würden wir mit einer W'keit von 21% den Tetraeder fälschlicherweise für einen Laplace-Tetraeder halten;

Bestimmung der Bereiche $\overline{K}(K)$

Die Bereiche sind in der Regel nicht vorgegeben, sondern müssen häufig rechnerisch ermittelt werden. Zu Grunde liegt folgender Sachverhalt: Falls H_0 wahr ist, möchte man es nur mit einer geringen, vorgegebenen W'keit α irrtümlich ablehnen.
Eine irrtümliche Ablehnung könnte folgenschwer sein!

H_0 ist wahr: $p \le 0.65$
n = 100
Z = Zufallsgröße
$\alpha = 2\%$



R1A:

$P_{0.65}^{100}(Z \in \overline{K}) \overset{!}{\le} \alpha$

$P_{0.65}^{100}(Z \in \overline{K}) \leq 0.02$
In Tabellenform:
$=> 1 - P_{0.65}^{100}(Z \leq k-1) \leq 0.02$
$P_{0.65}^{100}(Z \leq k-1) \leq 0.98$ <= $k-1$=gesucht; 0.98=Funktionswert gegeben
$k - 1 \geq 75$
$\underline{\underline{k \geq 76}}$
Also:
$\overline{K}$, der „Ablehnungs“-Bereich liegt bei: $\{76,...,100\}$
K, der „nicht-Ablehnungs“-Bereich liegt bei: $\{0,...,75\}$

<u>Einseitiger Test über p</u>
$P(Z \in \overline{K}) \leq \alpha$
$P(Z \geq c) \leq \alpha \vee P(Z \leq c) \leq \alpha$
<u>Zweiseitiger Test über p</u>
$P(Z \in \overline{K}) \leq \alpha$
$<=> P(Z \leq c_1) \leq \frac{\alpha}{2} \vee P(Z \geq c_1) \leq \frac{\alpha}{2}$
$<=> P(Z \leq c_2) \leq \frac{\alpha}{2} \vee P(Z \geq c_2) \leq \frac{\alpha}{2}$

<u>Zusätzliche Anmerkung zum Hypothesentest</u>
Falls H_0 wahr => $P(Z \in K) \geq \beta$ (Sicherheitsw'keit) bzw. $P(Z \in \overline{K}) \leq \alpha$ (Irrtumsw'keit), d.h. falls H_0 wahr, dann erfolgt Ablehnung mit Irrtumsw'keit von höchstens α bzw. Sicherheitsw'keit von mindestens β.

$Z \in \overline{K}$ bzw. $Z \in K$ $\cancel{=>}$ H_0 wahr bzw. falsch

<u>Fazit</u>: Hypothese nie direkt überprüfbar, sondern nur über Ablehnung ihrer Gegenhypothese = Nullhypothese mit möglichst geringer Irrtumswahrscheinlichkeit α.

<u>Was ist denn nun eigentlich die Nullhypothese H_0?</u> (Im Abitur immer vorgegeben!)
Falls nicht klar gesagt, was denn nun die Nullhypothese sein soll, dann ist sie oftmals gerade das Gegenteil dessen, was jemand behauptet.

<u>Arbeitsblätter zum Thema</u>
Präzisierung und Erweiterung der Begriffe S.68
Einseitiger Test über p S.69

<u>Integrationsmethoden</u> S.59
<u>Integration durch Substitution</u> S.59
WH: Im Folgenden sei F eine Stammfunktion zu f, d.h. F'(x) = f(x)
$=> F(x) = \int f(x)dx + C$
Es kommt nicht auf die Integrationsvariable an:
$F'(t) = f(t) => F(t) = \int f(t)dt + C$

Wir betrachten die verkettete Funktion $F(g(x))$ und differenzieren diese mit Hilfe der Kettenregel:

$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

$f(g(x)) \cdot g'(x) = [F(g(x))]' \mid \int (...)dx$

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x))dx$ <= Substitution $t = g(x)$

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(t)$

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt$

Fassung I der Substitutionsregel:

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt$, mit $t = g(x)$, $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx} = y'$ und $dt = g'(x)dx$

Zusatz:

Schreibweisen: $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx} = y'$

Hinweis: dt, dx heißen Differenziale, diese Differenziale muss man, wenn man substituiert unbedingt ebenfalls transformieren!

Formalisierung des Substitutionsvorganges I: S.62

- $t = g(x)$
- $\frac{dt}{dx} = g'(x) \Rightarrow$ $dt = g'(x)dx$, $dx = \frac{1}{g'(x)} dt$
- Berechnung des vereinfachten Integrals: $\int f(t)dt$
- Rückgängigmachen der Substitution
- PROBE!

Merke:

Fassung I: Die Substitutionsregel führt immer dann zum Erfolg, wenn der Integrand ein Produkt ist der Art, dass ein Faktor eine verkettete Funktion und der andere Faktor die Ableitung der inneren Funktion ist, bis auf einen eventuellen konstanten Faktor

Fassung II der Substitutionsregel:

$\int f(g(x)) \cdot g'(x) = \int f(t)dt$ <= Vertauschen der beiden Seiten ändert nichts an der Regel

$\int f(t)dt = \int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$

Es kommt nicht auf die Bezeichnung der Integrationsvariablen an, also:

$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$

$x = g(t)$; $dx = g'(t)dt$

Formal ergibt sich folgender Substitutionsvorgang:

$x = g(t) <=> t = g^{-1}(x)$

$\frac{dx}{dt} = g'(t)$

$dx = g'(t)dt$

Formalisierung des Substitutionsvorganges II:

- Wahl einer „geeigneten“ Funktion: $x = g(t) <=> t = g^{-1}(x)$
- $\frac{dx}{dt} = g'(t) <=> \frac{dt}{dx} = [g^{-1}(x)]'$ <= Hinweis: $\boxed{f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}}$
- Berechnung des vereinfachten Integrals (Grundintegral)
- Rückgängigmachen der Substitution

Hinweise:
Beim Berechnen bestimmter Integrale zunächst unbestimmtes Integral berechnen und danach erst das bestimmte Integral!
Nach „erfolgreicher“ Substitution darf sich im Integral keine „fremde“ Variable befinden!

Aufgabe: $f(t) = \int_0^{\frac{1}{t}} e^{tx} dx$ <= Es handelt sich um eine Integralfunktion in t

<= Die Integrationsvariable ist x bezüglich einer Integration in x verhält sich t wie ein fester Parameter (Konstante)
Also:
Wir berechnen zunächst das unbestimmte Integral, streben also eine integralfreie Darstellung an

Partielle Integration S.77

Hinführung:

$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \mid \int (...)dx$

$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x)dx + \int u(x) \cdot v'(x)dx$

$$\boxed{\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx \quad \text{<= Partielle Integration } (v(x) = \int v'(x)dx)}$$

Beispiel:

$\int \ln x dx$

$= \int 1 \cdot \ln x dx$ <= Faktor 1 als Trick!

$= \int v'(x) \cdot u(x)dx$ <= es kommt auf die richtige Wahl der Faktoren an!

$= \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx$

$= x \ln x - x + C$ <= FS!

Probe!

Erkenntnis:

Bei der partiellen Integration kommt es auf die richtige Wahl der Faktoren an. Die partielle Integration kann x-Potenzen abbauen.
Partielle Integration kann manchmal ein unangenehmes Integral der Substitution zugänglich machen!

Hinweis:
Bei Betragsfunktionen, erstmal Betragsfunktion splitten!
$f(x) = \begin{cases} f(x); x \geq 0 \\ f(x); x < 0 \end{cases}$ <= Merke: Immer richtige Funktion einsetzen!
Anmerkung:
Tauchen Betragsfunktionen auf (Zusammengesetzte Funktionen), so sind diese Funktionen an der Flickstelle (Knick im Graphen) in der Regel stetig, aber im Allgemeinen nicht differenzierbar. An den Knickstellen liegt in der Regel ein Hoch- oder Tiefpunkt vor der über Monotoniebetrachtungen abgesichert wird. f'(x) hat links und rechts an der Anschlussstelle entgegengesetzte Vorzeichen